

DYNAMIC SPATIAL GENERAL EQUILIBRIUM

动态空间一般均衡

目录

0. 摘要	2
1. 引言	3
1.1 研究动机.....	3
1.2 研究内容.....	3
1.3 研究贡献.....	3
2. 动态空间模型	4
2.1 生产部门.....	4
2.2 劳动者消费.....	4
2.3 资本积累.....	5
2.4 劳动者迁移决策.....	5
2.5 市场出清条件.....	5
2.6 一般均衡.....	6
2.6.1 资本回报与积累.....	6
2.6.2 产品市场出清.....	7
2.6.3 劳动者价值函数.....	7
2.6.4 人口迁移方程.....	7
2.6.5 一般均衡的性质.....	8
2.6.6 贸易与迁移份额矩阵.....	8
2.6.7 动态精确帽子代数.....	9
3. 谱分析	9
3.1 转移路径.....	10
3.2 一次性冲击的转移动态.....	10
3.2.1 二阶差分方程组.....	10
3.2.2 收敛动态与基本面冲击.....	11
3.2.3 转移矩阵的谱分析.....	12
3.3 两地区案例.....	14
3.4 序列冲击的转移动态.....	17
4. 模型拓展	17

5. 量化分析	18
5.1 数据与参数.....	18
5.2 收入收敛.....	19
5.3 稳态收敛与基本冲击.....	20
5.3.1 初始条件与基本面冲击.....	20
5.3.2 资本积累与迁移动态.....	21
5.4 谱分析结果.....	22
5.4.1 稳态收敛速度.....	22
5.4.2 初始条件与收敛性.....	24
5.4.3 基本面冲击.....	25
5.4.4 脉冲响应分析.....	26
5.4.5 收敛速度的比较静态.....	29
5.5 多部门量化分析.....	30
6. 结论	31
7. 附录 B	32

0. 摘要

We incorporate forward-looking capital accumulation into a dynamic discrete choice model of migration. We characterize the steady-state equilibrium; generalize existing dynamic exact-hat algebra techniques to incorporate investment; and linearize the model to provide an analytical characterization of the economy's transition path using spectral analysis. We show that capital and labor dynamics interact to shape the economy's speed of adjustment toward steady state. We implement our quantitative analysis using data on capital stocks, populations, and bilateral trade and migration flows for U.S. states from 1965–2015. We show that this interaction between capital and labor dynamics plays a central role in explaining the observed decline in the rate of income convergence across U.S. states and the persistent and heterogeneous impact of local shocks.

本文将前瞻性资本积累纳入了动态离散迁移选择模型中。本文描述了稳态均衡；推广了现有的动态精确帽子代数技术；并且将模型线性化，以使用谱分析方法对经济转型路径进行探讨。本文的研究表明，资本与劳动的动态交互作用改变了经济向稳态的调整速度。本文使用 1965 年至 2015 年美国各州的资本存量、人口以及双边贸易和劳动力流动数据进行量化分析，结果显示，资本与劳动间的动态交互作用在解释美国各州收入趋同速度下降与地方冲击的持续且异质性影响方面发挥着核心作用。

1. 引言

1.1 研究动机

经济学的核心研究问题是理解经济活动的分布对基本面冲击（如生产率变化）的反应。一般而言，这种反应可能是动态的，因为流动要素（劳动力）的迁移摩擦，以及不流动要素（资本结构）的逐渐积累。然而，一个关键的挑战是在具有人口流动性的经济地理模型中对前瞻性资本投资进行建模。原因是每个地点的投资和迁移决策存在相互依赖性，并且涉及未来所有时间段和所有地点，考虑到经验现实中的大规模地点数量，这将导致令人望而却步的庞大的状态空间。对此，本文主要想解决的问题有两个：第一，如何开发一个可以克服高维状态空间挑战的易于处理的一般均衡模型框架；第二，如何解出这个一般均衡模型动态变化的闭式解。

1.2 研究内容

本文主要做了以下工作：第一，模型设定。本文首先详细说明了模型的基本设定，包括常弹性引力方程（Constant Elasticity Gravity Equation）、代理人设定（Workers and Landlords）等，清楚说明了为何在本文模型设定下可以避免引入大型状态空间（State Space）去分析动态空间经济问题。此外，本文还证明了即使考虑大量经济地理差异，模型稳态均衡（Steady-state Equilibrium）仍然存在且唯一，并且可以使用动态精确帽子代数（Dynamic Exact-hat Algebra）的方法求解空间经济演进动态；

第二，模型线性化。接下来，本文展示了如何通过冲击矩阵（Impact Matrix）与转移矩阵（Transition Matrix）将模型线性化（Linearize）从而解出经济动态变化路径的闭式解（Closed-form Solution），而这些矩阵均可基于经验数据获得；

第三，模型应用。本文将模型应用于分析 1965 - 2015 年美国各州收入收敛性（Income Convergence）的决定因素，以及当地冲击的持续性和异质性影响。分析发现美国各州收入收敛的决定性因素更多地取决于各州的初始条件，而不是基本面冲击（Shocks to Fundamentals），各州的初始条件差异解释了收入收敛速度的下降。本文还采用谱分析（Spectral Analysis）进一步表明了稳态收敛取决于资本积累与劳动力迁移之间的相互作用，并详细分析了密歇根州锈带地区（Rust Belt）相对生产力下降、亚利桑那太阳带地区（Sun Belt）相对舒适度提升特征对劳动力流动与资本积累的影响机理；

第四，模型拓展。本文后续进行了一系列模型拓展，以表明本文所构建模型的可拓展性。例如，本文进一步将集聚力引入生产和居住决定，证明在常弹性贸易模型中，无论市场是否完全竞争，本文所得出的基准结论依然成立。不仅如此，本文还引入住宅资本、允许地主（Landlord）投资其他地区、引入多部门投入产出关系，拓展了本文基准模型。

1.3 研究贡献

与现有文献相比，本文主要做出了两个主要贡献：（1）首先，本文开发了一个易操作

的模型框架，将前瞻性投资纳入动态的离散选择迁移模型，从而克服了高维状态空间的挑战，构建了一个空间经济学领域易于扩展的基准工作模型（Workhorse Model）；（2）其次，本文将模型进行线性化，基于一系列技术获得动态空间一般均衡模型的经济演进路径的闭式解，从而得以对动态空间经济问题进行分析。

2. 动态空间模型

本文模型基本经济环境设定如下：（1）经济系统中包括多个离散地区（Locations）；（2）时间 t 为离散变量；（3）两种无限期生存的代理人（Agents）寻求终生效用最大化：① 劳动者（Workers），无弹性供给 1 单位劳动力，并且可以花费迁移成本进行区域流动，他们没有额外收入进行投资，是仅够温饱的（Hand-to-Mouth）；② 业主（Landlords），拥有地方资本（Local Capital）且区域不可流动，他们将基于终生效用最大化对消费和地方投资（Local Investment）进行前瞻性决策（Forward-looking Decision）。

2.1 生产部门

t 时期，地区 i 拥有劳动者（ ℓ_{it} ）与地方资本（ k_{it} ），地区企业采用劳动力与地方资本进行生产，产出（ y_{it} ）服从以下完全竞争与规模报酬不变生产函数：

$$y_{it} = z_{it} \left(\frac{\ell_{it}}{\mu} \right)^\mu \left(\frac{k_{it}}{1-\mu} \right)^{1-\mu}, \quad 0 < \mu < 1, \quad (1)$$

其中， z_{it} 代表 i 地区、 t 时期的相对生产率。假定地区之间贸易需支付冰山运输成本（Iceberg Trade Cost），令 $\tau_{nit} > 1$, $n \neq i$ 为 i 地区运往 n 地区的运输成本价格加成比例，本地产品自产自销不存在运输成本，也即 $\tau_{iit} = 1$ ，则产品定价为：

$$p_{nit} = \tau_{nit} p_{iit} = \frac{\tau_{nit} w_{it}^\mu r_{it}^{1-\mu}}{z_{it}}, \quad (2)$$

其中， p_{iit} 为离岸价格（Free on Board），不妨令各地区总劳动力收入标准化为 1，也即有： $\sum_{i=1}^N w_{it} \ell_{it} = 1$ 。

2.2 劳动者消费

t 时期，地区 n 的劳动者的当期效用取决于当地生活舒适度（Amenities, b_n ）与消费指数（ c_n^w ）。注意劳动者不进行投资，并且按照 Armington 形式（Armington (1969)）对各异质性贸易产品进行消费，以最大化其跨期效用，其效用函数如下：

$$u_n^w = b_n c_n^w, \quad c_n^w = \left[\sum_{i=1}^N (c_{ni}^w)^{\frac{\theta}{\theta+1}} \right]^{\frac{\theta+1}{\theta}}, \quad \theta = \sigma - 1, \quad \sigma > 1, \quad (3)$$

其中，上标 w 代表劳动者， $\sigma > 1$ 为 CES 函数常替代弹性， $\theta = \sigma - 1 > 0$ 为贸易弹性，则劳动者间接效用函数与对偶价格指数（Dual Price Index, p_n ）可表示为：

$$u_{nt}^w = \frac{b_{nt} w_{nt}}{p_{nt}}, \quad p_{nt} = \left[\sum_{i=1}^N p_{nit}^{-\theta} \right]^{-1/\theta}, \quad (4)$$

其中, p_{nit} 为来自 i 地区异质性产品的价格。

2.3 资本积累

t 时期, 地区 i 的业主在其预算约束下, 选择消费与投资最大化其跨期效用:

$$v_{it}^k = \mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} \frac{(c_{it+s}^k)^{1-1/\psi}}{1-1/\psi}, \quad (5)$$

其中, 上标 k 代表业主, 消费指数 c_{it}^k 的形式与公式 (3) 一致, β 为跨期贴现因子, ψ 为跨期消费替代弹性。由于前文设定业主不跨区域迁移, 因此这里不考虑业主对地区便利性设施的效用, 因为这并不会影响均衡结果。

假定业主各地区投资的加总函数形式与消费指数一致, 则其投资与消费指数的相对价格为 1, 也即业主跨期选择的预算约束为:

$$r_{it} k_{it} = p_{it} (c_{it}^k + k_{it+1} - (1-\delta)k_{it}), \quad (6)$$

其中, r_{it} 为 i 地区 t 时期资本的收益率, $k_{it+1} - (1-\delta)k_{it}$ 为 t 时期净投资, 不妨令 $R_{it} \equiv 1 - \delta + r_{it} / p_{it}$ 为资本的毛收益率。此时, 可证得以下引理 1 (见附录 B.1)。

引理 1: 令 ζ_{it} 满足 $\zeta_{it}^{-1} = 1 + \beta^\psi (\mathbb{E}_t [R_{it+1}^\psi \zeta_{it+1}^\psi])^\psi$, 则最优化条件下 i 地区 t 时期业主的消费决策为 $c_{it}^k = \zeta_{it} R_{it} k_{it}$, 投资决策为 $k_{it+1} = (1 - \zeta_{it}) R_{it} k_{it}$ 。

引理 1 表明业主在最优化条件下拥有线性的储蓄率 $(1 - \zeta_{it})$, 并且是内生的、前瞻性的, 取决于未来的资本毛收益率 $\{R_{it+s}\}$ 。

2.4 劳动者迁移决策

在提供劳动力并进行消费以后, 劳动者在 t 时期将面临一个特殊的迁移冲击 (ϵ_{gt}), 并决定迁移到哪个地区 (或者不迁移)。则劳动者在 i 地区 t 时期的价值函数 \mathbb{V}_{it}^w 及其最优化地区迁移条件可表示如下:

$$\mathbb{V}_{it}^w = \ln u_{it}^w + \max_{\{g\}_1^N} \left\{ \beta \mathbb{E}_t \left[\mathbb{V}_{gt+1}^w \right] - \kappa_{git} + \rho \epsilon_{gt} \right\}, \quad (7)$$

其中, β 为跨期贴现因子, $\mathbb{E}_t[\cdot]$ 代表迁移 g 地区预期价值收益, 本文假定劳动者效用函数为对数形式 (Log Utility), 迁移冲击 ϵ_{gt} 满足极值分布函数 $F(\epsilon) = e^{-e^{-(\epsilon - \bar{\gamma})}}$, 其中 $\bar{\gamma}$ 为欧拉-马歇罗尼常数 (Euler-Mascheroni Constant), 系数 ρ 为迁移冲击的分散系数, 假定双边迁移成本 κ 满足 $\kappa_{nii} > 1$, 当且仅当 $n = i$ 时, 有 $\kappa_{iii} = 1$ 。

2.5 市场出清条件

产品市场出清意味着在任一地区 i , 劳动者与业主的总收入都将等于该地区产品生产的

总投入，也即满足如下条件：

$$(w_{it}\ell_{it} + r_{it}k_{it}) = \sum_{n=1}^N S_{nit}(w_{nt}\ell_{nt} + r_{nt}k_{nt}), \quad (8)$$

其中，本文假定区际贸易是平衡的，贸易不平衡的情况将在第 4 章模型拓展部分进行论述。而资本市场出清则意味着资本收益率等于厂商采用资本要素的相对边际产出，在完全竞争市场与利润最大化条件下资本市场出清条件为：

$$r_{it}k_{it} = \frac{1-\mu}{\mu} w_{it}\ell_{it}, \quad (9)$$

本文动态空间一般均衡模型的基本设定如表 1 所示。

一、生产部门	
生产函数	$y_{it} = z_{it} \left(\frac{\ell_{it}}{\mu}\right)^{\mu} \left(\frac{k_{it}}{1-\mu}\right)^{1-\mu}$
区际贸易成本	$\tau_{nit} \geq 1$
二、劳动者偏好与迁移选择	
劳动者价值函数	$\mathbb{V}_{it}^w = \ln u_{it}^w + \max_{\{g_{it}^N\}} \{ \beta \mathbb{E}_t[\mathbb{V}_{it+1}^w] - \kappa_{git} + \rho \epsilon_{git} \}$
劳动者当期效用	$u_{it}^w = b_{it} \left[\sum_{i=1}^N (c_{nit}^w)^{\frac{\theta}{\theta+1}} \right]^{\frac{\theta+1}{\theta}}$
区际迁移成本	$\kappa_{git} \geq 1$
劳动力市场出清	$\sum_{i=1}^N \ell_{it} = 1$
三、业主偏好与资本积累	
业主跨期选择函数	$v_{nt}^k = \mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} \frac{(c_{nt+s}^k)^{1-1/\psi}}{1-1/\psi}$
业主当期效用	$c_{nt}^k = \left[\sum_{i=1}^N (c_{nit}^k)^{\frac{\theta}{\theta+1}} \right]^{\frac{\theta+1}{\theta}}$
资本积累函数	$k_{nt+1} = (1-\delta)k_{nt} + \sum_{i=1}^N t_{nit}^k$
四、产品市场出清	
产品市场出清条件	$y_{it} = \sum_{n=1}^N (c_{nit}^w + c_{nit}^k) + \sum_{n=1}^N t_{nit}^k$

注： t_{nit}^k 表示业主用于 n 地区投资的生产于 i 地区 t 时期的消费品。

2.6 一般均衡

给定状态变量 (State Variables) $\{\ell_{i0}, k_{i0}\}$ ，经济系统一般均衡表现为资源配置与价格的随机过程，在这一过程中，所有地区的企业选择要素投入实现利润最大化，劳动者选择消费与区际迁移最大化其效用，业主则选择消费与投资最大化其效用，所有市场均出清。为了更清晰地说明一般均衡结果，本文特别挑选 5 个模型内生变量 $\{\ell_{it}, k_{it}, w_{it}, R_{it}, v_{it}\}_{t=0}^{\infty}$ ，其他所有内生变量均能表示为这些变量的函数。

2.6.1 资本回报与积累

基于公式 (9) 资本市场出清条件，任一地区 i 的资本毛收益率需满足如下条件：

$$R_{it} = 1 - \delta + \frac{1-\mu}{\mu} \frac{w_{it}\ell_{it}}{p_{it}k_{it}},$$

而任一地区 i 的价格指数则可以表示为：

$$p_{it} = \left[\sum_{i=1}^N \left(w_{it} \left(\frac{1-\mu}{\mu} \right)^{1-\mu} (\ell_{it} / k_{it})^{1-\mu} \tau_{ni} / z_i \right)^{-\theta} \right]^{-1/\theta}, \quad (10)$$

资本运动方程为：

$$k_{it+1} = (1 - \zeta_{it}) \left(1 - \delta + \frac{1-\mu}{\mu} \frac{w_{it} \ell_{it}}{p_{it} k_{it}} \right) k_{it}, \quad (11)$$

其中， $(1 - \zeta_{it})$ 为引理 1 中定义过的储蓄率，也即：

$$\zeta_{it}^{-1} = 1 + \beta^y (\mathbb{E}_t [R_{it+1}^y \zeta_{it+1}^y])^y.$$

2.6.2 产品市场出清

使用 CES 消费份额，公式 (2) 产品市场均衡价格，公式 (9) 资本市场出清条件，公式 (8) 产品市场出清条件，则各地区收入与产品生产投入相等的条件可以改写为仅决定于劳动收入，也即：

$$w_{it} \ell_{it} = \sum_{n=1}^N S_{nit} w_{nt} \ell_{nt}, \quad (12)$$

$$S_{nit} = \frac{(w_{it} (\ell_{it} / k_{it})^{1-\mu} \tau_{ni} / z_i)^{-\theta}}{\sum_{m=1}^N (w_{mt} (\ell_{mt} / k_{mt})^{1-\mu} \tau_{nm} / z_m)^{-\theta}}, \quad T_{int} \equiv \frac{S_{nit} w_{nt} \ell_{nt}}{w_{it} \ell_{it}}, \quad (13)$$

其中，(12) 式得以化简的原因在于资本收入可以简单表示为劳动收入的常数倍， S_{nit} 为 t 时期 n 地区进口自 i 地区的支出份额， T_{int} 为 t 时期 i 地区出口到 n 地区获得的收入份额，注意二者下表 n 与 i 位置有所不同，一方面代表变量主体地区，另一方面则代表不同的矩阵位置（第一个下标代表矩阵行，而第二个下标则代表矩阵列）。

2.6.3 劳动者价值函数

使用公式 (7) 劳动者价值函数、公式 (3) 劳动者间接效用函数、以及 Gumbel 极值分布的性质，可得劳动者 t 时期 n 地区的期望价值函数 v_{nt}^w 为：

$$v_{nt}^w = \ln b_{nt} + \ln \left(\frac{w_{nt}}{p_{nt}} \right) + \rho \ln \sum_{g=1}^N \left(\exp(\beta \mathbb{E}_t v_{gt+1}^w) / \kappa_{gnt} \right)^{1/\rho}, \quad (14)$$

其中， $v_{nt}^w \equiv \mathbb{E}_\epsilon [V_{nt}^w]$ ，也即对迁移冲击 $\{\epsilon_{gt}\}$ 的价值期望； $\mathbb{E}_t [v_{gt+1}^w] = \mathbb{E}_t \mathbb{E}_\epsilon [V_{nt+1}^w]$ 则取决于未来基本面变量 $\{z_{is}, b_{is}\}_{s=t+1}^\infty$ 。

2.6.4 人口迁移方程

基于极值函数的性质，人口分布随时间演变的人口流动条件为：

$$\ell_{gt+1} = \sum_{i=1}^N D_{igt} \ell_{it}, \quad (15)$$

$$D_{igt} = \frac{(\exp(\beta \mathbb{E}_t v_{gt+1}^w) / \kappa_{git})^{1/\rho}}{\sum_{m=1}^N (\exp(\beta \mathbb{E}_t v_{mit+1}^w) / \kappa_{mit})^{1/\rho}}, \quad E_{git} \equiv \frac{\ell_{it} D_{igt}}{\ell_{gt+1}}, \quad (16)$$

其中, D_{igt} 为 $t \sim t+1$ 时期、 i 地区向 g 地区的迁出概率 (Outmigration Probability); E_{git} 为 $t \sim t+1$ 时期、 g 地区向 i 地区相应的迁入概率 (Immigration Probability)。

2.6.5 一般均衡的性质

给定状态变量 $\{\ell_{it}, k_{it}\}$ 以及现实地区基本面 $\{z_{it}, b_{it}\}$, 任一时期的一般均衡均可解出, 与基准静态贸易模型求解过程一致。例如, 资本存量 $\{k_{it}\}$ 由均衡储蓄率决定; 动态人口分布 $\{\ell_{it}\}$ 则由区际迁移引力方程决定。下面本文将正式定义这个一般均衡。

定义 1—一般均衡: 在初始时期 $t=0$, 给定任一地区 i 状态变量 $\{\ell_{i0}, k_{i0}\}$, 一般均衡是指任一地区 i 工资、资本回报、预期收益、劳动者数量、资本存量的随机过程 (Stochastic Process) $\{w_{it}, R_{it}, v_{it}, \ell_{it+1}, k_{it+1}\}_{t=0}^{\infty}$, 可基于 t 时期的基本面冲击 $\{z_{is}, b_{is}\}_{s=1}^t$ 进行衡量, 并解出价值函数 (公式 (14))、人口流动条件 (公式 (15))、产品市场出清条件 (公式 (12))、资本市场出清条件 (公式 (11)), 其中储蓄率则由引理 1 决定。

本文接下来定义确定性稳态, 在稳态下基本面 $\{z_i^*, b_i^*\}$ 与内生变量 $\{\ell_i^*, k_i^*, w_i^*, R_i^*, v_i^*\}$ 将不随时间变化, 本文使用星号上标表明变量的稳态值。

定义 2—稳态: 经济稳态是指一种均衡状态, 此时所有地区相关基本面与内生变量 (工资、预期收益、劳动者数量以及地区资本存量) 都不随时间变化, 可以用符号表示为 $\{z_i^*, b_i^*, \ell_i^*, k_i^*, w_i^*, R_i^*, v_i^*\}$ 。

接下来, 本文将提供模型存在唯一稳态解的充分条件 (Sufficient Condition)。

命题 1—稳态唯一存在性: 给定不随时间变化的地区基本面 $\{z_i^*, b_i^*, \tau_{ni}^*, \kappa_{ni}^*\}$, 存在唯一的稳态经济活动空间分布 (取决于个体选择) $\{\ell_i^*, k_i^*, w_i^*, R_i^*, v_i^*\}$ 的充分条件为, 模型参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ 的系数矩阵 (A) 的谱半径 (Spectral Radius) 小于或等于 1。

证明见附录 B.2。

2.6.6 贸易与迁移份额矩阵

为捕捉基本面冲击下模型的动态演进路径, 下面本文将引入贸易与迁移份额矩阵:

(1) **贸易份额矩阵。** 令 S 为 $N \times N$ 的矩阵, 其中第 ni 个元素为进口地区 n 在出口地区 i 上的支出; 令 T 为 $N \times N$ 的矩阵, 其中第 in 个元素为出口地区 i 在进口地区 n 上的收入; 据此, 本文定义矩阵 S 为支出份额矩阵 (Expenditure Share Matrix), 矩阵 T 为收入份额矩阵 (Income Share Matrix)。

(2) **迁移份额矩阵。** 类似的, 令 D 为 $N \times N$ 的矩阵, 其中第 ni 个元素为地区 n 向地区 i 的向外迁移份额 (Outmigrants, 迁出); 令 E 为 $N \times N$ 的矩阵, 其中第 in 个元素为地区 i 向地区 n 的向内迁移份额 (Immigrants, 迁入); 据此, 本文定义矩阵 D 为迁出份额矩阵 (Outmigration Matrix), 矩阵 E 为迁入份额矩阵 (Immigration Matrix)。

此外，为了理论的完备性，本文将基于实证数据的特征进一步假定：第一，矩阵 \mathbf{S} 与矩阵 \mathbf{D} 为不可约矩阵（Irreducible Matrix），也即对于所有地区都存在直接或间接贸易与迁移流，矩阵满足对于任意 i, n ，都有 $[\mathbf{S}^k]_{in} > 0$ 、 $[\mathbf{D}^k]_{in} > 0$ ；第二，所有地区都拥有正的物资产品与正的自有居民，也即对于任意 i 有 $\mathbf{S}_{ii} > 0$ 、 $\mathbf{D}_{ii} > 0$ 。

2.6.7 动态精确帽子代数

现在，本文将进一步推广现有动态精确帽子代数（Dynamic Exact-hat Algebra）方法，将前瞻性投资决策纳入反事实分析中。假定可观测的经济活动空间分布正沿着不可观测的稳态演进，则给定初始已观测的模型内生变量，可以针对任何未来基本面变化的预期收敛序列解出经济动态演进路径的时间差分形式（ $\dot{x}_{t+1} = x_{t+1} / x_t$ ），详见命题 2。

命题 2—动态精确帽子代数：给定一组已被观测到的经济系统初始资源配置情况：

$(\{\ell_{i0}\}_{i=1}^N, \{k_{i0}\}_{i=1}^N, \{k_{ij}\}_{i=1}^N, \{S_{ni0}\}_{n,i=1}^N, \{D_{ni,-1}\}_{n,i=1}^N)$ ，并且在完全理性预期（Perfect Foresight）下存在一个未来基本面变化的收敛序列：

$$\left\{ \{z_{it}\}_{i=1}^N, \{b_{it}\}_{i=1}^N, \{\tau_{ijt}\}_{i,j=1}^N, \{\kappa_{ijt}\}_{i,j=1}^N \right\}_{t=1}^{\infty},$$

则求解这个模型所有内生变量的变化序列，并不需要以下基本面的任何信息：

$$\left\{ \{z_{it}\}_{i=1}^N, \{b_{it}\}_{i=1}^N, \{\tau_{ijt}\}_{i,j=1}^N, \{\kappa_{ijt}\}_{i,j=1}^N \right\}_{t=0}^{\infty}.$$

证明见附录 B.3。

直观来说，本文通过初始观测到的内生变量数据以及模型的均衡条件对未观测到的基本面初始水平进行了控制，基于命题 2，可以采用动态精确帽子代数的方法在基本面变量没有进一步变化的情况下求解未观察到的初始经济稳态，还可以用这种方法求解未来基本面变化冲击下经济活动的动态空间演化路径的反事实（Counterfactuals）。

不仅如此，将模型反转（Invert the Model）还可以在观测到内生变量发生变化且完全理性预期的情况下，对未观测到的生产率、舒适度、贸易成本以及区际迁移成本进行求解（具体见补充材料 S.2.1）。更重要的是，可以沿着转移路径（Transition Path）进行这种模型反转，而不需要对未来基本面的精确序列做出更多假设，因为所以观测到的迁移流与资本存量捕捉了代理人对未来基本面序列的理性预期。

3. 谱分析方法

为进一步分析资本与劳动力动态变化的影响，本文将对模型进行线性化（Linearize），并对经济的转移路径进行谱分析。对于任意情形，本文表明经济转移路径的闭式解均取决于两个矩阵：冲击矩阵（Impact Matrix）和转移矩阵（Transition Matrix），而这两个矩阵又都仅依赖于四个观测矩阵（ \mathbf{S} 、 \mathbf{T} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} ）的结构参数。因此对转移矩阵进行特征分解（Eigendecomposition），使用谱分析方法揭示收敛速度的异质性以及资本积累与劳动力迁移

对地区冲击（Local Shocks）的持久性异质影响。

3.1 转移路径

假定期初（ $t=0$ ）观测到状态变量 $\{\ell_t, \mathbf{k}_t\}$ 以及贸易与迁移份额矩阵 $\{\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\}$ ，期初经济并未处于稳态，假定在稳态收敛路径上基本面保持不变为 $\{\mathbf{z}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\tau}\}$ ，本文称之为“初始稳态（Initial Steady State）”。本文在变量上加波浪号来代表变量与稳态间的对数偏差（例如， $\tilde{\ell}_{it+1} = \ln \ell_{it+1} - \ln \ell_i^*$ ），特别的，对于劳动者价值方程，本文则用波浪号代表采用水平偏差形式，也即 $\tilde{v}_it \equiv v_{it} - v_i^*$ 。

接下来，本文首先对模型中未观测到的初始稳态的一般均衡条件进行全微分（Totally Differentiating），并保持加总的劳动力禀赋、贸易成本和迁移成本不变，然后由此推导出以下线性方程组，该方程组充分描述了经济转移路径的一阶条件（F.O.C.）：

$$\tilde{p}_t = \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{w}}_t - \tilde{\mathbf{z}}_t - (1-\mu)(\tilde{\mathbf{k}}_t - \tilde{\ell}_t)), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{k}}_{t+1} &= \tilde{\mathbf{k}}_t + (1-\beta(1-\delta))(\tilde{\mathbf{w}}_t - \tilde{p}_t - \tilde{\mathbf{k}}_t - \tilde{\ell}_t) \\ &\quad + (1-\beta(1-\delta))\frac{1-\beta}{\beta}(\psi-1) \\ &\quad \times \mathbb{E}_t \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s (\tilde{\mathbf{w}}_{t+s} - \tilde{p}_{t+s} - \tilde{\mathbf{k}}_{t+s} - \tilde{\ell}_{t+s}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$[\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})]\tilde{\mathbf{w}}_t = \left[-(\mathbf{I} - \mathbf{T})\tilde{\ell}_t + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})(\tilde{\mathbf{z}}_t + (1-\mu)(\tilde{\mathbf{k}}_t - \tilde{\ell}_t)) \right], \quad (19)$$

$$\tilde{\ell}_{t+1} = \mathbf{E}\tilde{\ell}_t + \frac{\beta}{\rho}(\mathbf{I} - \mathbf{ED})\mathbb{E}_t \tilde{v}_{t+1}, \quad (20)$$

$$\tilde{v}_t = \tilde{\mathbf{w}}_t - \tilde{p}_t + \tilde{\mathbf{b}}_t + \beta \mathbf{D}\mathbb{E}_t \tilde{v}_{t+1}, \quad (21)$$

具体推导见附录 B.4.4。

需要特别注意的是：在这个线性方程组中，贸易和迁移份额矩阵并没有下标项，因为当考虑生产率与舒适度的一阶变化时，这些二阶非线性项会从线性化中消失。在之后的实证分析中，本文将表明观测到矩阵与稳态矩阵的谱分析结果是一致的。

3.2 一次性冲击的转移动态

为了说明本文所使用的方法，首先求解经济转移路径对于一次冲击的响应。假定代理人在 $t=0$ 时了解到下一期（ $t=1$ ）将发生基本面（生产率与舒适度）的一次外生的持久性冲击，此时可以将未来基本面相对于初始水平的序列写为 $(\tilde{\mathbf{z}}_t, \tilde{\mathbf{b}}_t) = (\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{b}})$ ，其中 $t \geq 1$ ，从而可以进一步消解掉公式（18-21）中的期望算子（Expectation Operator）。

3.2.1 二阶差分方程组

在附录 B.4.4-B.4.5 中，本文表明模型的转移动态（Transition Dynamics）可以被简化为如下状态变量的线性二阶差分方程组：

$$\boldsymbol{\Psi}\tilde{\mathbf{x}}_{t+2} = \boldsymbol{\Gamma}\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} + \boldsymbol{\Theta}\tilde{\mathbf{x}}_t + \boldsymbol{\Pi}\tilde{\mathbf{f}}_t, \quad (22)$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}}_t = \begin{bmatrix} \tilde{z}_t \\ \tilde{k}_t \end{bmatrix}$ 为 $2N \times 1$ 的状态变量向量; $\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}$ 为 $2N \times 1$ 的基本面冲击向量; Ψ 、 Γ 、 Θ 、 Π 均为 $2N \times 2N$ 的矩阵, 仅取决于模型结构参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ 以及已观测的贸易与迁移份额矩阵 $\{S, T, D, E\}$ 。

本文采用 Uhlig (1999) 待定系数 (Undetermined Coefficients) 的方法求解公式 (22) 的线性二阶差分方程组, 从而得到经济转移路径的闭式解, 也即冲击矩阵 R (捕捉了基本面的初始冲击) 与转移矩阵 P (控制了状态变量随时间的演变)。特别的, 一个 $4N \times 4N$ 的矩阵 $\begin{bmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma & \Theta \\ I & 0 \end{bmatrix}$ 拥有如下形式的特征向量: $[\lambda_k \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k]'$, 其中 $\{\lambda_k\}$ 为对应的特征值, $\{\mathbf{u}_k\}$ 为 $2N \times 1$ 的向量。如果特征值为稳定的, 也即 $|\lambda_k| < 1$, 则这个二阶线性方程组有且仅有一个稳定转移路径 (可详见于 Dejong and Dave (2011))。

命题 3—转移路径: 假定经济在 $t=0$ 时期已经处于向基本面初始稳态 $\{z, b, \kappa, \tau\}$ 的收敛路径中, 同时代理人在 $t=0$ 时期可以了解到将在 $t=1$ 时期发生的一次基本面的持久性冲击 $\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}$ 。则存在 $2N \times 2N$ 的转移矩阵 P 和 $2N \times 2N$ 的冲击矩阵 R , 使得公式 (22) 中的二阶差分方程组可以解出闭式解:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} = P\tilde{\mathbf{x}}_t + R\tilde{\mathbf{f}}, \quad \text{for } t \geq 0. \quad (23)$$

转移矩阵 P 满足:

$$P = U\Lambda U^{-1},$$

其中, Λ 为稳定特征值 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2N}$ 的 $2N \times 2N$ 对角矩阵, U 为特征向量 $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{2N}$ 的 $2N \times 2N$ 堆叠矩阵。冲击矩阵 R 可由下式给出:

$$R = (\Psi P + \Psi - \Gamma)^{-1} \Pi,$$

其中, $(\Psi, \Gamma, \Theta, \Pi)$ 矩阵均来自公式 (22) 的二阶差分方程。

证明见附录 B.4.6。

至于两个关键矩阵 (P, R) 的解, 则仅仅依赖于模型结构参数以及贸易与迁移份额矩阵 (S, T, D, E) 。

3.2.2 收敛动态与基本面冲击

基于命题 3 的闭式解, 经济状态变量的转移路径可以进一步分解为给定的初始基本面的收敛 (Convergence Given Initial Fundamentals) 以及基本面动态冲击 (Dynamic from Fundamental Shocks)。采用公式 (23) 的跨期形式有:

$$\ln \mathbf{x}_t - \ln \mathbf{x}_{-1} = \underbrace{\sum_{s=0}^t P^s (\ln \mathbf{x}_0 - \ln \mathbf{x}_{-1})}_{\text{初始基本面收敛}} + \underbrace{\sum_{s=0}^{t-1} P^s R \tilde{\mathbf{f}}}_{\text{基本面动态冲击}}, \quad \text{for all } t \geq 1. \quad (24)$$

(1) 当基本面没有受到冲击时 ($\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$), 公式 (24) 等式右边为 0, 此时, 状态变量的

演变仅由给定初始条件的收敛动态决定，并且随时间收敛至：

$$\ln \mathbf{x}_{\text{initial}}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \mathbf{x}_t = \ln \mathbf{x}_{-1} + (\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} (\ln \mathbf{x}_0 - \ln \mathbf{x}_{-1}), \quad (25)$$

其中，当矩阵 \mathbf{P} 的谱半径小于 1 时， $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{P}^s$ 是明确定义的。

(2) 当经济在初期 ($t=0$) 即处于稳态，则公式 (24) 等式右边第一项为 0，此时，状态变量的转移路径仅取决于第二项基本面冲击，并且：

$$\tilde{\mathbf{x}}_t = \ln \mathbf{x}_t - \ln \mathbf{x}_0 = \sum_{s=0}^{t-1} \mathbf{P}^s \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}^t)(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}, \quad \text{for all } t \geq 1. \quad (26)$$

在 $t=1$ 时冲击发生，状态变量的响应为 $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}$ ，考虑公式 (26) 中 $t \rightarrow \infty$ 的情况，此时比较稳态响应 (Comparative Steady-state Response) 可表示为：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}_t = \ln \mathbf{x}_{\text{new}}^* - \ln \mathbf{x}_{\text{initial}}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}. \quad (27)$$

对公式 (24) 的进一步分解的意义在于，基于这种分解，可以从经济收敛到不变稳态的特性方便地检验基本面冲击的经济动态响应。因此，在不失一般性的情况下，本文在接下来的分析中将重点关注经济在初期便处于稳态的情形。

3.2.3 转移矩阵的谱分析

接下来本文将通过对转移矩阵的谱分析，进一步揭示在经济受到冲击后资本与劳动变化在其动态调整中的作用。我们表明，稳态收敛速度与状态变量沿着转移路径向稳态的演变过程均可以使用转移矩阵的特征值与特征变量进行表示。

(1) 转移矩阵的特征分解。本文对转移矩阵 \mathbf{P} 进行特征分解，也即 $\mathbf{P} \equiv \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}$ ，其中 $\mathbf{\Lambda}$ 为特征值的对角矩阵（按绝对值降序排列）， $\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1}$ 。对于任意特征值 λ_h ，矩阵 \mathbf{U} 的第 h 列 \mathbf{u}_h 和矩阵 \mathbf{V} 的第 h 行 \mathbf{v}'_h 分别为矩阵 \mathbf{P} 相应的右特征向量与左特征向量，也即：

$$\lambda_h \mathbf{u}_h = \mathbf{P}\mathbf{u}_h, \quad \lambda_h \mathbf{v}'_h = \mathbf{v}'_h \mathbf{P}.$$

换言之， \mathbf{u}_h （或 \mathbf{v}'_h ）是这样一个向量：当左乘（或右乘）矩阵 \mathbf{P} 时，将变为自身的一个比例倍数，比例为对应的特征值 λ_h 。据此，本文将向量 \mathbf{u}_h 与 \mathbf{v}'_h 称为特征向量，二者皆为扩张到 (Span) $2N$ 维向量空间的基。

(2) 特征冲击 (Eigenshock)。本文定义特征冲击为对生产率与舒适度 ($\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$) 的非零冲击，其与初始冲击下状态变量 ($\mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$) 转移矩阵的真实特征向量 (\mathbf{u}_h) 或零向量保致一致。也就是说，特征冲击 $\{\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}\}_{h=1}^{2N}$ 形成了扩张到 $2N$ 维冲击空间的基。转移矩阵 \mathbf{P} 的任一非零值特征向量 ($|\lambda_h| > 0$) 均存在对应的特征冲击，其中 $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}_{(h)} = \mathbf{u}_h$ 。本文将这种具有非零特征值的特征向量称为“非平凡向量 (Nontrivial)”，因其将会影响状态变量的动态过程。而对于矩阵 \mathbf{P} 存在零特征值 ($\lambda_1 = 0$) 的特征向量 $\mathbf{u}_1 = [1, \dots, 1, 0, \dots, 0]'$ ，考虑到人口份额加总为 1，也即 $2N$ 维的状态空间中存在一个冗余值 (Redundant)。其对应的基本面冲击 $\tilde{\mathbf{f}}_{(1)}$ 是

所有地区普遍舒适度冲击的向量，这一普遍冲击虽然会影响劳动者的流动效用，但并不会影响均衡状态下任何价格与数量关系，因此这一向量并不会影响状态变量的动态变化，是平凡的（Trivial）。本文采用小标 1 代表这样的平凡特征分解。

事实上，现实冲击（Empirical Shock）并不一定与特征冲击相关，不过本文可以使用这些特征冲击去表征任何现实冲击，原因在于以下两大性质：第一，这些特征冲击均可以从已观测数据中进行求解，因为冲击矩阵 \mathbf{R} 和转移矩阵 \mathbf{P} 均仅依赖于现实观测的贸易和迁移矩阵 $(\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{E})$ 以及模型结构参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ ；第二，任何现实生产率与舒适度冲击 $\tilde{\mathbf{f}}$ 都可以表示为特征冲击 $\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$ 的线性组合，并且该线性组合的权重（Weights）或载荷（Loadings）均能通过已观测冲击 $\tilde{\mathbf{f}}$ 对特征冲击 $\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$ 进行投影（或回归）求解。基于这一性质，状态变量对于现实生产率与舒适度冲击响应的转移路径可以仅用转移矩阵的特征值与特征向量进行表示，如以下命题所示：

命题 4—谱分析：假定经济在初期（ $t=0$ ）便处于稳态，并且代理人在初期了解到未来 $t=1$ 时将会发生一次持久的基本面冲击（ $\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix}$ ）。此时，状态变量的转移路径可以写成转移矩阵 \mathbf{P} 特征值（ λ_h ）与特征向量（ \mathbf{u}_h ）的一个线性组合：

$$\tilde{\mathbf{x}}_t = \sum_{s=0}^{t-1} \mathbf{P}^s \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}} = \sum_{h=1}^{2N} \frac{1 - \lambda_h^t}{1 - \lambda_h} \mathbf{u}_h \mathbf{v}'_h \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}} = \sum_{h=2}^{2N} \frac{1 - \lambda_h^t}{1 - \lambda_h} \mathbf{u}_h a_h, \quad (28)$$

其中，这个线性组合的权重 a_h 可以通过对已观测到的基本面冲击 $\tilde{\mathbf{f}}$ 或特征冲击 $\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$ 进行线性投影（或回归）系数获得。

该命题的证明依赖于对转移矩阵的特征分解： $\mathbf{P} \equiv \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}$ ，详见附录 B.4.9。

此外，一个特征冲击后经济向稳态收敛的速度——以收敛到稳态的半衰期（Half-life）衡量，仅取决于转移矩阵的相关特征值，如以下命题所示：

命题 5—收敛速度：假定经济在初期（ $t=0$ ）处于稳态，并且代理人在初期了解到未来 $t=1$ 时会发生一次基本面冲击（ $\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix}$ ）。假设这些经验冲击的非平凡（Nontrivial）特征冲击为 $\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$ ，其对状态变量的初始冲击在 $t=1$ 时期与转移矩阵 \mathbf{P} 的真实特征值 \mathbf{u}_h 一致，也即存在 $\mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}_{(h)} = \mathbf{u}_h$ ，则状态变量 \mathbf{x}_t 对该特征冲击响应的转移路径为：

$$\tilde{\mathbf{x}}_t = \sum_{j=2}^{2N} \frac{1 - \lambda_j^t}{1 - \lambda_j} \mathbf{u}_j \mathbf{v}'_j \mathbf{u}_h = \frac{1 - \lambda_h^t}{1 - \lambda_h} \mathbf{u}_h \quad \Rightarrow \quad \ln \mathbf{x}_{t+1} - \ln \mathbf{x}_t = \lambda_h^t \mathbf{u}_h,$$

则对于所有状态变量 $h=2, \dots, 2N$ ，其收敛到稳态的半衰期为：

$$t_h^{(1/2)}(\tilde{\mathbf{f}}) = - \left\lceil \frac{\ln 2}{\ln \lambda_h} \right\rceil,$$

其中， $\tilde{x}_{i\infty} = x_{i,\text{new}}^* - x_{i,\text{initial}}^*$ ， $\lceil \cdot \rceil$ 为上取整函数（Ceiling Function）。特别的，对于相关特征值为零的平凡特征冲击，其半衰期为零。

证明见附录 B.4.9。

基于命题 5，非平凡特征冲击 $\tilde{f}_{(h)}$ 在每个时期对状态变量的影响均可以表示为相应特征向量 u_h 的倍数，并且按照以相关特征值 λ_h 所决定的速率收敛到新的稳态（非平凡特征冲击为复数形式时也适用）。这些特征值高度概括了经济对特征冲击的收敛速度，即使本文模型包含了高维状态空间、丰富的经济地理环境（贸易与迁移成本）以及多种动态驱动力。

总的来说，每个特征冲击 $\tilde{f}_{(h)}$ 均存在不同的收敛速度（由相关特征值 λ_h 所捕获），这反映了一个事实：经济收敛到稳态的速度不仅取决于结构参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ ，还取决于各个地区的状态变量（也即资本与劳动）的冲击发生率（由 $u_h = R\tilde{f}_{(h)}$ 所捕获），从而收敛速度也取决于各个地区的经验冲击。

3.3 两地区案例

为更加详细地论述谱分析方法，本文将从一个简单的案例：即模型中仅存在两个处于稳态的对称地区（Symmetric Locations），开始说明。首先需要注意到，地区对称也即说明支出份额矩阵 S 与迁移份额矩阵 D 也是各自对称的，也即存在 $T = S$ 且 $E = D$ 。

假设在初期（ $t = 0$ ）代理人受到一次持久性基本面冲击，由初始稳态基本面 $\tilde{f} = \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}$ 的对数偏差所决定。接下来，本文分三步对这个对称两地区案例进行谱分析：

(1) 第一步，基于初始稳态下状态变量的对数偏差 $\tilde{x}_t = \begin{bmatrix} \ln \ell_t - \ln \ell^* \\ \ln k_t - \ln k^* \end{bmatrix}$ ，采用命题 3 的结论写出冲击下状态变量的动态响应：

$$\tilde{x}_{t+1} = P\tilde{x}_t + R\tilde{f}, \quad \text{for } t \geq 0, \quad \text{with } \tilde{x}_0 = \mathbf{0}. \quad (29)$$

此时，基本面冲击 \tilde{f} 的初始效应由冲击矩阵 R 决定：

$$\tilde{x}_1 = R\tilde{f}.$$

状态变量的后续变化则由转移矩阵 P 调节：

$$\tilde{x}_{t+1} - \tilde{x}_t = P\tilde{x}_t, \quad \text{for all } t \geq 0.$$

考虑到每个地区均存在 2 个状态变量（人口份额与资本存量）和 2 个基本面冲击（生产率与舒适度），因此转移矩阵 P 和冲击矩阵 R 均为 4×4 矩阵。

(2) 第二步，基于命题 4 的结论，使用转移矩阵 P 的特征值来表示状态变量的动态响应过程。首先，以序列形式（Sequence Form）重写公式 (29) 中的递归公式：

$\tilde{x}_t = (\sum_{s=0}^{t-1} P^s)R\tilde{f}$ ；其次，对矩阵 P 进行特征分解，将其迭代幂求和公式（Summation over Iterative Powers）改写为特征基分量（Components of the Eigenbasis）求和公式：

$$\tilde{x}_t = \sum_{h=1}^4 \frac{1 - \lambda_h^t}{1 - \lambda_h} u_h v_h' R\tilde{f}, \quad (30)$$

其中， \mathbf{u}_h 、 \mathbf{v}'_h 、 λ_h 分别为转移矩阵 \mathbf{P} 的右特征向量、左特征向量和特征值。以上公式清晰地表明状态变量的动态响应可以用初始基本面冲击 ($\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}$) 以及转移矩阵的特征分量进行表示。

(3) **第三步**，基于命题 5，使用特征冲击的线性组合表示状态变量的初期经验冲击 $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}$ 。首先，本文定义非平凡特征冲击 $\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$ 为对基本面的冲击，其中状态变量的初期冲击 $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$ 对应于转移矩阵的右特征向量 \mathbf{u}_h 。对于这种非平凡特征冲击，状态变量的动态效应可以采用其第 h 个特征分量来充分表征（因为 $\mathbf{v}'_h \mathbf{u}_h = 1$ 且 $\mathbf{v}'_g \mathbf{u}_h = 0$ for all $g \neq h$ ）：

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} - \tilde{\mathbf{x}}_t |_{\tilde{\mathbf{f}}=\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}} = \lambda_h^t \mathbf{u}_h, \quad \tilde{\mathbf{x}}_t |_{\tilde{\mathbf{f}}=\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}} = \frac{1 - \lambda_h^t}{1 - \lambda_h} \mathbf{u}_h, \quad (31)$$

也即收敛到新稳态的速率仅取决于相应的特征值 λ_h ， λ_h 的值越大，则冲击后经济收敛到稳态的速度就越慢。其次，由于任一经验冲击 $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}$ 均能表示为特征冲击的线性组合，也即： $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{i=1}^{2N} a_i \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}_{(i)}$ ，因此可以基于经验冲击对特征冲击的回归重新确定线性组合的权重 a_i 。鉴于以上，本文得以通过特征分解方法来表征任何状态变量的经验冲击。

总而言之，转移矩阵 \mathbf{P} 的特征值与特征向量不仅取决于模型参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ ，也取决于整个贸易与迁移矩阵 $(\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{E})$ 。在这个对称两区域案例中，转移矩阵 \mathbf{P} 的四个特征向量可以简单表示如下：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \zeta \\ -\zeta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\xi \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (32)$$

其中，常数 ζ 、 ξ 均依赖于模型参数以及贸易与迁移份额矩阵 ($\mathbf{S} = \mathbf{T}, \mathbf{D} = \mathbf{E}$)，详见附录 B.4.10。事实上，这四个向量就可以扩张整个四维向量空间。

现在，本文将对转移矩阵 \mathbf{P} 的特征向量进行一个直观的解释：

(1) 第一个特征向量 $\mathbf{u}_1 = [1, 1, 0, 0]'$ 存在为零的相关特征值，其对应的特征冲击为 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2] = [0, 0, 1, 1]'$ ，这样一个平凡特征冲击捕捉到是两个地区普遍的舒适度冲击，因此人口份额与资本存量并不会改变。这时，相关特征值等于 0，初始稳态与新稳态是重合的，因此将立即收敛。

(2) 第二个特征向量 $\mathbf{u}_2 = [0, 0, 1, 1]'$ ，其对应的特征冲击为 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2] = [1, 1, 0, 0]'$ 。这个特征分量捕捉了两个地区的普遍生产率冲击，由于对称性假设，这一冲击并不会改变人口份额，也即此特征向量前两个要素为 0。不过需要注意的是，这一普遍生产率冲击将导致两个地区内消费价格指数 (Consumer Price Index) 对称下降，从而引起资本使用成本的对

称下降，因此将对称地影响两个地区的资本动态，也即其第三、第四个要素是相等的。在这个对称案例中，对于普遍生产率冲击的资本动态响应与单一地区封闭经济中是一致的。在这个特殊案例中，业主拥有单一跨期替代弹性（在对数效用形式下），其对应的特征值为 $[1 - (1 - \beta(1 - \delta))\mu]$ 。

(3) 第三、四个特征向量捕捉了两个地区非对称的冲击效应。第三个特征向量 $\mathbf{u}_3 = [1, -1, \zeta, -\zeta]'$ 对应的特征冲击为 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2] = [1, -1, c, -c]'$ ，其中 c 是一个常数；第四个特征向量 $\mathbf{u}_4 = [1, -1, -\xi, \xi]'$ 对应的特征冲击为 $[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2] = [1, -1, -d, d]'$ ，其中 d 也是一个常数。在这两种情况下，地区 1 与地区 2 状态变量在稳态下的偏差拥有相同的绝对值，但两者符号正好相反。

(4) 尽管不能在理论上对常数 ζ 、 ξ 、 c 、 d 的正负号进行确认，但基于经验数值，本文发现这些参数都是正数。因此，在这样的符号限制下，其中一个特征向量（ \mathbf{u}_3 ）捕获了基本面冲击在不同地区的正向影响，而另一个特征向量（ \mathbf{u}_4 ）则捕获了其负向影响。也即第三个特征向量 \mathbf{u}_3 捕获了以下情况：一个地区要么同时受到正向的基本面冲击（1 和 c ），要么同时受到负向的基本面冲击（-1 和 $-c$ ）。在这种情形下，资本与劳动的状态变量的新稳态值要么都高于其初始值（受到正向冲击时），要么都低于其初始值（受到负向冲击时），也即在特征向量 \mathbf{u}_3 下，经济对于冲击的初始响应是两个状态变量同向的。与之相反，第四个特征向量 \mathbf{u}_4 则捕获了基本面冲击在不同地区的负相关情况，也即地区间对基本面冲击的响应正负号是相反的。此时，新稳态下将存在一个地区人口份额较高、资本存量较低，而另一个地区人口份额较低、资本存量较高的情况。

(5) 在本文的所有数值模拟中，发现第三个特征向量 \mathbf{u}_3 的特征值均高于第四个特征向量 \mathbf{u}_4 的特征值，因此，如果不同地区基本面中生产率与舒适度冲击呈正相关，则经济向稳态收敛的速度将更慢。其原因在于：生产过程中资本与劳动的边际生产率将相互影响，当资本与劳动要素均要与稳态时，高资本存量将提高劳动的边际产出，从而抑制了劳动力的下降。同理，高劳动力供给也会提高资本的边际产出，从而抑制了资本的下降。而当资本与劳动均低于稳态时，每个状态变量的相对低值均会减慢另一个状态变量的向上调整过程。最后，两地区基本面冲击的任何模式均能通过这四种类型的特征冲击线性组合来捕获：①地区间普遍舒适度冲击；②地区间普遍生产率冲击；③地区间完全正向相关的基本面冲击；④地区间完全负向相关的基本面冲击。本文在后续的分析中表明：即使在具有许

多不对称位置的完整模型量化分析中，这一基本结论也是成立的。

3.4 序列冲击的转移动态

为了简化分析，上文重点介绍了一次性冲击的转移动态，事实上本文的方法也可以非常方便地推广到序列冲击（Sequences of Shocks）情形中。

在命题 S.1（详见附录 S.2.3）中，本文提供了对于任意在理性预期下未来基本面序列冲击的经济转移路径的闭式解。在命题 S.2（详见附录 S.2.4）中，本文则提供了对于代理人观察到初始基本面冲击，并基于基本面已知随机过程形成对未来冲击的理性预测下，经济转移路径的闭式解。事实上，由于在存在期望误差（Expectational Errors）的情况下求解非线性动态模型具有挑战性，现有动态空间模型的研究大多仅仅局限于对未来的完全理性预期（Perfect Foresight）。然而，本文所采用的线性化方法可以适应这些期望误差，从而为经济转移路径提供一个闭式解。

需要注意的是：在任何一种情况下，二阶差分方程（22）的解均取决于转移矩阵 \mathbf{P} 与冲击矩阵 \mathbf{R} ，而这些矩阵也均可从已观测的贸易与迁移矩阵 $\{\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\}$ 与模型结构参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ 中进行求解。

4. 模型拓展

本文所开发动态空间模型是非常易于拓展的，可以纳入大量泛化特征：

（1）在附录 S.4.1 中，本文进一步将双边贸易与迁移成本冲击引入了已有矩阵系统中，也即公式（17-21）。

（2）在附录 S.4.2 中，本文则进一步将集聚力（Agglomeration Forces）引入模型，也即允许生产率与舒适度存在内生部分，即 $z_{it} = \bar{z}_{it} \ell_{it}^{\eta^z}$ 、 $b_{it} = \bar{b}_{it} \ell_{it}^{\eta^b}$ 。为简便起见，本文假定集聚力仅取决于地区人口，当然进一步的推广是容易的（例如，Ahlfeldt et al. (2015); Allen, Arkolakis, and Li (2020)），从集聚力（ $\eta^z > 0$ and $\eta^b > 0$ ）向分散力（Dispersion Forces, $\eta^z < 0$ and $\eta^b < 0$ ）的推广也不难。同样，基于模型参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta, \eta^z, \eta^b\}$ 的矩阵 A^{AEG} 的性质，本文也提供了经济存在唯一稳态均衡的充分条件：

命题 6: 给定不随时间变化的地区基本面 $\{\bar{z}_i^*, \bar{b}_i^*, \tau_{ii}^*, \kappa_{ii}^*\}$ ，存在唯一经济空间分布稳态 $\{\ell_i^*, k_i^*, w_i^*, R_i^*, v_i^*\}$ （取决于可选择变量）的充分条件为，模型参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta, \eta^z, \eta^b\}$ 的系数矩阵 A^{AEG} 的谱半径小于或等于 1。

证明见附录 S.4.2.3。

注意到，当集聚力的强度逐渐变弱，特别是趋近于 0 值时（ $\eta^z, \eta^b \rightarrow 0$ ），以上充分条件将退化为命题 1，表明本理论模型是自洽的。

（3）本文动态空间模型还可以拓展纳入多部门（Multiple Sectors）与投入-产出关系（Input-output Linkages）。在附录 S.4.3 中，本文引入多部门生产，此时资本虽然仍被安装在

某个特定地区，但可以在多个部门间进行流动。在附录 S.4.4 中，本文考虑了资本在特定地区与部门的安装。在附录 S.4.5 中，本文进一步考虑了多部门设定与投入-产出联系。

(4) 基准模型中，本文假定区际贸易与产品消费为 Armington 形式，也即消费产品按原产地进行区分。在附录 S.3 中，本文建立了一系列同构 (Isomorphisms)，分析表明本文的结论在常贸易弹性下的一系列贸易模型设定中均得以成立。在附录 S.4.6 中，本文采用量化国际贸易文献中的常用方法，将贸易逆差以外生形式引入模型。在附录 S.4.7 中，本文允许资本可以用于居住形式 (住宅) 或商业形式 (产品生产)。在附录 S.4.8 中，本文允许业主对其他地区进行投资，但受限于双边投资成本 (Bilateral Investment Costs) 与跨区投资生产率的特殊异质性 (Idiosyncratic Heterogeneity)，这将引入一个金融流动 (Financial Flows) 的引力方程。在附录 S.4.9 中，本文将引入劳动力的参与决定。

在以上所有拓展中，前文所使用的动态精确帽子代数方法与谱分析方法继续适用。

5. 量化分析

我们现在基于理论框架为美国收入趋同和地区冲击的持续性与异质性影响提供新的证据——尽管这两个问题已有大量的研究文献。一方面，与收入趋同有关的现有文献通常脱离地区间迁移与贸易的现实，尽管这是美国经济数据的核心特征；另一方面，与地方冲击持续性和异质性影响相关的文献虽然通常允许迁移选择，但也基本上脱离地区间建筑设施与地区结构的前瞻性投资，尽管这些特征是现实中的核心特征。本文基准模型设定了一个单部门的形式，然而这一假设并不符合现实，因此本文在接下来的分析中将主要考虑其扩展形式——也即假定产品存在可贸易部门与不可贸易部门的区别。

本章内容安排如下：在第 5.1 小节，本文讨论了数据来源与模型参数化；在第 5.2 小节，本文提供了自 1960 年代初以来美国各州人均收入趋同率下降的证据；在 5.3 小节，本文实证分析了这种观察到的收入趋同下降在多大程度上是由初始条件与基本面冲击来解释的，并进一步量化了资本与劳动动态的各自贡献；在 5.4 小节中，本文使用谱分析方法研究了经济向稳态的收敛速度以及资本与劳动动态在塑造地区冲击的持续性与异质性影响；在 5.5 小节中，本文总结了 1999-2015 年模型多部门拓展的实证结果，进一步讨论的详细过程见附录 S.6.8。

5.1 数据与参数

本文基准量化分析的主要数据来源于 1965-2015 美国经济分析局 (BEA) 的国民经济账户，该账户报告了美国各个州的人口、GDP 和资本存量。本文的样本包括美国 48 个本土州和 1 个特区，不包括阿拉斯加州和夏威夷州两个海外州，主要考虑到这两个海外州在 1959 年才开始成为美国的一个州，并且由于地理分离，可能存在无法观测的特殊因素影响。本文还将这些样本州划分为 4 个地理组：锈带地区 (Rust Belt)、太阳带地区 (Sun

Belt)、其他北方州 (Other Northern) 和其他南方州 (Other Southern)。除此之外, 本文还将 GDP 与资本存量按 2012 年的不变价进行平减。

本文美国各州间 5 年/次的双边迁移流的数据来自美国人口普查 (1960-2000 年数据) 和美国社区调查 (ACS, 2000-2015 年数据), 为匹配 5 年/次的现实数据, 本文将模型的一个周期 (Period) 定义为 5 年, 而对于 10 年/次的人口普查数据, 本文对其进行插值以获得 5 年/次的迁移流。考虑到各州国际移民与出生率/死亡率存在差异, 本文通过每个本地州 (Origin State) 与目标州 (Destination State) 的标量 (Scalar) 对这些迁移流进行调整, 使得第 t 年的本地州人口乘以迁移矩阵等于第 $t+1$ 年的目标州人口, 从而满足内部一致性。

本文美国各州之间的双边运输数据来源于美国商品流量调查 (CFS, 1993-2017 数据), 及其前身美国商品运输调查 (CTS, 1977-1993 数据), 而对于 1977 年以前的数据, 本文将利用本地州与目标州的收入相对变化将数据进行倒推插值 (详见附录 S.7)。对于本文仅涉及单个可贸易与不可贸易部门的基准量化分析, 由于在样本期刚开始时美国贸易开放 (Trade Openness) 程度相对较低, 因此从进出外国的直接出货量中提取数据。而在多部门扩展中, 本文进一步纳入了对外贸易, 并且采用按运输来源地划分的出口数据和按装运目的地划分的进口数据。

为了重点分析模型纳入前瞻性投资决策的影响, 本文从现有实证文献中总结了模型结构参数的标准值: (1) 本文假设贸易弹性为 $\theta = 5$, 参考 Costinot and Rodríguez-Clare (2014); (2) 本文设定 5 年贴现率为 $\beta = (0.95)^5$ 的常规取值; (3) 本文假设跨期替代弹性为 $\psi = 1$, 与对数跨期效用相对应; (4) 本文假设迁移弹性为 $\rho = 3\beta$, 参考 Caliendo, Dvorkin, and Parro (2019); (5) 本文假设劳动产出累积份额为 $\mu = 0.65$, 这是宏观经济学文献中的常规取值; (6) 本文假设年折旧率为 5%, 也即 5 年折旧率为 $\delta = 1 - (0.95)^5$, 这也是宏观经济学文献中的常规取值。

本文后续基于比较静态的思想, 采用经济转移路径的闭式解, 分析了这些模型参数中每一个参数变化将如何影响经济向稳态的收敛速度。

5.2 收入收敛

本文首先提供证据, 表明美国各州的人均收入趋同率正随着时间的推移而大幅下降。在图 1 中, 本文展示了美国各个州在不同子时期的人均收入年化增长率与其初始对数水平的关系, 这与经济增长文献中常规的 β 收敛设定一致。图中圆圈的大小表征了美国各州初始人口的相对大小, 红实线为回归拟合线。

基于图 1: ①从最左边的子图 (1963-1980 年) 中, 不难发现收入是显著收敛的, 系数为负数 (-0.0257) 且具有统计学意义, 这一估计系数也与 Barro and Sala-i-Martin (1992) 在 1880-1988 年更长时期内估计都 -0.02 较为一致; ②到了中间的子图 (1980-2000 年), 不

难发现这种收敛关系已经大大减弱，斜率系数下降了将近一半 (-0.0148)；③而到了最右边的子图（2000-2017 年），收入的收敛关系已经转变为发散关系，系数为正 (0.0076) 但不具有统计学关系。

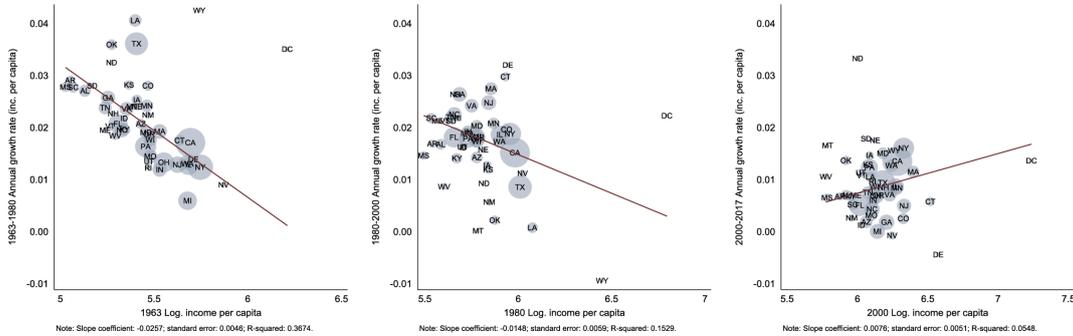


FIGURE 1.—Growth and Initial Level of Income Per Capita. *Note:* Vertical axis shows the annualized rate of growth of income per capita for the relevant subperiod; horizontal axis displays the initial level of log income per capita at the beginning of the relevant subperiod; circles correspond to U.S. states; the size of each circle is proportional to state employment; the solid red line shows the linear regression relationship between the two variables.

图 1 人均收入增长与初始水平

5.3 稳态收敛与基本冲击

在本文的理论框架中，收入收敛的速度由以下两组力量决定：第一，初始条件，即状态变量与稳态之间的初始偏差；第二，基本面冲击，即生产率、舒适度、贸易成本以及迁移摩擦。事实上，这两组力量对收入收敛速度的影响又都受到资本积累与迁移的影响。因此，下面本文将基于理论框架为收入收敛的下降及其决定因素提供证据。

5.3.1 初始条件与基本面冲击

基于命题 2 动态精确帽子代数方法，本文将对初始条件与基本面冲击在收入收敛方面的相对重要性进行比较。从样本期开始观察到的均衡开始，本文首先求解了在基本面没有任何进一步变化的情况下经济向稳态的转移路径，从而得以仅依赖于初始条件便足以获得每年人均收入的反事实模拟。

对于人均收入的实际值与反事实模拟，本文将未来 10 年的人均收入对数增长率对 1970-2010 年的初始收入水平进行回归。在图 2 (a) 中，本文展示了这些随时间变化的相关系数，主要表现了实际人均收入（黑色虚线）与在没有任何进一步基本面冲击下人均收入的反事实模拟（红色实线）的区域收敛速度。本文发现，反事实模拟与实际人均收入的区域收敛速度的下降幅度大致相同，这表明现实中观察到的收入收敛下降很大程度上依赖于样本开始时的初始条件，而不是任何随后的基本冲击。

为进一步证明初始条件在解释所观察到的收入收敛下降方面的作用，本文将实际对数人口增长速度对其基于不变基本面冲击预测的反事实进行回归，更多的细节详见附录

S.6.5. 预测的人口增长速度仅仅依赖于资本与劳动状态变量的初始值以及初始贸易和迁移份额矩阵，也不使用任何后续的人口增长信息。尽管如此，这两者仍然存在一种正向且具有统计学意义的关系，预测的人口增长可以解释所观测人口增长的大部分情况。尤其是在1975年以来，这种关系变得尤为强烈——1975-2015年期间的二者的回归系数为0.99， R^2 为0.82。本文表明，预测人口增长的这种解释力并不是由均值回归所驱动的，即使控制初始对数人口、初始对数资本存量、初始对数人口增速，这一关系仍然显著成立。

总而言之，这些结果表明所观测到现实收入收敛速度下降的原因，主要在于样本的初始条件，而不是基本面冲击。此外，实际收入与反事实模拟收入的收敛速度下降均花费了数十年的时间，这为经济将缓慢收敛到稳态提供了一些初步证据（First Evidence）。

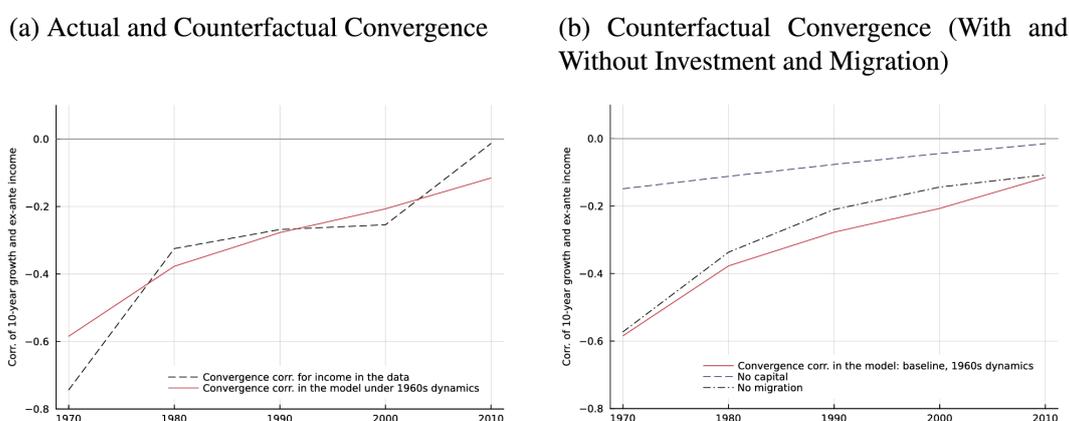


FIGURE 2.—Initial Conditions and Income Convergence. *Note:* Correlation coefficients between the 10-year ahead log growth in income per capita and its initial log level in each year from 1970–2010; in the left panel, the dashed black line show these correlations in the data; in both panels, the red solid line shows the correlation coefficients for counterfactual income per capita, based on starting at the observed equilibrium in the data at the beginning of our sample period, and solving for the economy’s transition path to steady state in the absence of any further shocks to fundamentals; in the right panel, the black dashed line shows results for the special case with no capital accumulation, and the black dashed-dotted line shows results for the special case with no migration.

图2 初始条件与收入收敛

5.3.2 资本积累与迁移动态

接下来，本文将分析资本积累与迁移动态在初始条件影响中的作用。首先，基于命题2的动态精确帽子代数，本文对模型的两种特殊情况进行分析：一种是不存在投资（此时，本文模型将退化为 [Caliendo, Dvorkin, and Parro \(2019\)](#) 的动态离散选择迁移模型）；另一种是不选择迁移（也即各州人口份额均保持在1965年的水平）。然后，与前文方法一致，本文将从样本期初观测到的稳态均衡出发，在没有任何基本面变化的情况下求解经济向稳态的转移路径。这样，本文就能够得到每一年度人均收入的反事实模拟，也即仅由初始条件确定的、没有投资或迁移行为的反事实收敛路径。

利用这些反事实预测，本文再一次将未来10年的人均收入对数增长率对1970-2010年

的初始收入水平进行回归，在图 2 (b) 中本文展示了完整模型（一如图 2 (a) 的结果，红色实线表示）、无投资模型（黑色虚线）以及无迁移模型（黑色点虚线）随时间变化的相关系数。基于图 2 (b)，不难发现：随着时间的推移，投资和迁移动态对收入收敛下降均具有重要影响。其中，资本积累的作用要大于迁移动态，这突出了将投资决策纳入动态空间模型的重要性。不过，即使在不考虑资本积累、仅考虑迁移动态的模型中，收入收敛相关系数也较基准结果下降了约 20%。换句话说，允许模型中出现迁移动态对于匹配和解释美国现实数据随时间的变化也是重要的。

5.4 谱分析结果

基于前文所述模型线性化与谱分析方法，本文接下来进一步讨论资本积累与迁移动态在塑造初始条件以及基本面冲击方面的作用。第一，本文分析了经济向稳态收敛速度的决定因素；第二，本文研究了资本与迁移动态在收敛过程中的作用；第三，本文评估了这两种动态来源如何塑造了地区冲击的持续性与异质性影响；第四，本文还基于比较静态方法评估了模型参数对于经济向稳态收敛速度的影响。

5.4.1 稳态收敛速度

基于命题 3-5，本文计算了由转移矩阵特征值确定的经济向稳态收敛的半衰期。在图 3 中，本文展示了整个 $2N$ 特征分量谱的半衰期（带有圆圈标记的黑色实线），按半衰期升序排列。其中，每一个非平凡特征分量对应一个特征冲击，其对状态变量的初始影响等于转移矩阵的特征向量 ($\mathbf{u}_h = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$)。图 3 也展示了基于 1975 年隐含稳态的贸易与迁移份额矩阵 ($\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$) 计算的转移矩阵 \mathbf{P} ，本文基于命题 2 中的动态精确帽子代数方法来计算这些隐含稳态的矩阵。考虑到 1975 年各州离稳态的平均距离最远，因此本文采用 1975 年的数据进行分析，事实上采用其他年份数据分析结果基本一致（详见附录 S.6.6.1、附录图 S.6.8 以及附录 S.6.6.7）。

与前文在对称两地区案例一样，这些特征分量具有一些直观解释。例如，特征向量 $[1, \dots, 1, 0, \dots, 0]$ 捕捉了对所有地区的普遍舒适度冲击，这并不能改变人口份额与资本存量，如红色点垂线所示；另一个特征向量 $[0, \dots, 0, 1, \dots, 1]$ 则捕捉了对所有地区的普遍生产率冲击，虽然也不会改变人口份额，但却会影响所有地区的资本存量发生变化，如蓝色实垂线所示；在对数偏好 ($\psi = 1$) 的设定下，特征向量拥有相关特征值为 $[1 - \mu(1 - \beta(1 - \delta))]$ ，如蓝色水平虚线所示；在红色点虚线和蓝色实垂线之间，存在 $N - 1$ 个特征分量，其资本与劳动状态变量到稳态的缺口 (Gap) 存在负相关关系，因此其收敛到稳态的速度将相对较快；在蓝色实垂线的右侧，也存在 $N - 1$ 个特征分量，其资本与劳动状态变量到稳态的缺口存在正相关关系，因此其收敛到稳态的速度将相对较慢。

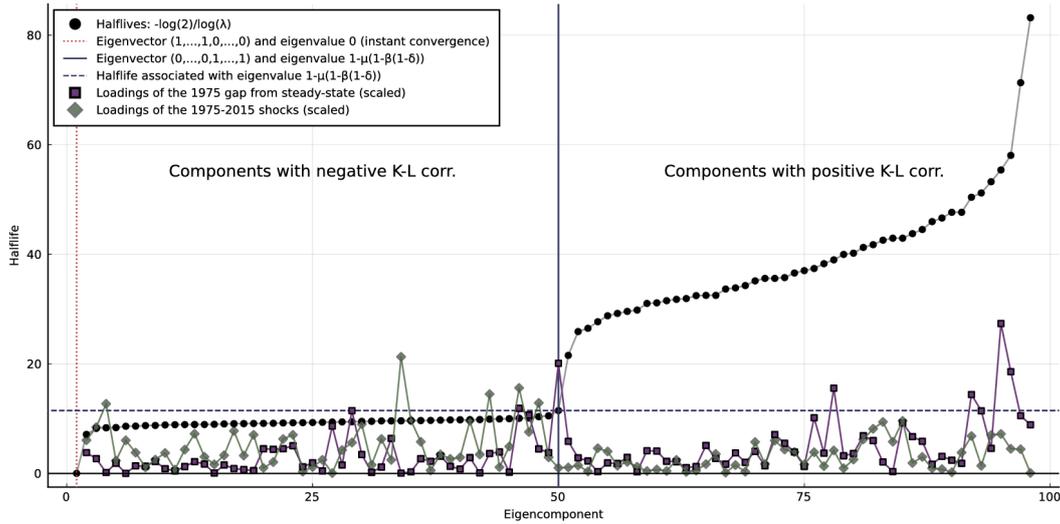


FIGURE 3.—Spectrum of Eigencomponents for 1975. *Note:* Spectrum of eigencomponents for the steady-state transition (P) matrix for 1975 recovered using our dynamic exact-hat algebra results from Proposition 2; eigencomponents are sorted in increasing order of half-life of convergence to steady state; black solid line with circle markers shows half-life of convergence to steady state; red dotted vertical line shows the eigenvector $[1, \dots, 1, 0, \dots, 0]'$ with eigenvalue 0; blue solid vertical line shows the eigenvector $[0, \dots, 0, 1, \dots, 1]'$, which with log preferences ($\psi = 1$) has eigenvalue $[1 - \mu(1 - \beta(1 - \delta))]$, as shown by the blue dashed horizontal line; purple solid line with square markers shows the loadings of the 1975 gaps of the state variables from steady state on the eigencomponents; green solid line with diamond markers shows the loadings of the 1975–2015 productivity and amenity shocks on the eigencomponents.

图3 1975年特征分量的谱分析

图3中，有以下三点需要特别注意：

(1) 首先，经济收敛到稳态的速度通常十分缓慢，整个特征冲击谱的平均半衰期约为20年。因此，本文理论框架所得出的结果与现有约简式实证研究的结果一致，例如中国对美国的冲击（Autor, Dorn, and Hanson (2013)）、巴西贸易自由化的影响（Dix-Carneiro and Kovak (2017)），等相关研究。

(2) 其次，特征冲击的收敛速度存在较大的异质性特征，收敛半衰期从平凡特征冲击 $[0, \dots, 0, 1, \dots, 1]'$ 的瞬时收敛到大约80年不等。因此，本文的理论框架也合理化了当地劳动力市场冲击的异质性影响，正如 Eriksson, Russ, Shambaugh, and Xu (2019) 所强调的。

(3) 最后，不同地区劳动状态变量与资本状态变量间缺口的相关性越高，收敛到稳态的速度越慢（半衰期越大）。在附录 S.6.6.2 的附录图 S.6.9 中，本文提供了关于这种关系强度的进一步探讨。本文研究发现，资本与劳动的动态相互作用塑造了经济向稳态的收敛速度，也即反映了生产技术中资本与劳动边际产品间的相互作用。如果地区经历了降低劳动力和资本存量稳态值的负向冲击，那么从衰退地区往外迁移的过程将会因当地资本存量的下降而放缓，反之亦然。因此，本文的理论框架可以通过资本与劳动的动态交互解释地区冲击的持续性与异质性影响。

在图3中，本文还将1975年稳态的状态变量缺口与1975-2015年生产率与舒适度的经验冲击（特征冲击）联系起来。本文分析基于这样一种特性展开：状态变量与稳态（或经

验基本面冲击)的任何偏差都可以被表示为特征分量的线性组合。对于状态变量与稳态的偏差,这些载荷(Loadings)可以从稳态偏差对转移矩阵特征向量(Eigenvectors)的回归中获得,图中带有方形标记的紫色线展示了1975年到稳态的载荷;而对于经验基本面冲击,这些载荷则可以从经验基本面冲击对转移矩阵特征冲击(Eigen shocks)的回归中获得,图中带有菱形标记的绿色线展示了1975-2015年经验冲击对生产率与舒适度的载荷。需要指出的是:本文从完整的非线性模型中获取了稳态缺口以及经验生产率与舒适度冲击,分别在附录S.2.2和附录S.6.7中进行了讨论。此外,图3显示的是这些载荷的绝对值,并且进过归一化处理,因此其绝对值加总和等于1。

比较两组载荷,不难发现在特征分量谱的上部,1975年与稳态缺口的载荷通常更大,其对应收敛到稳态的速度较慢(在蓝色实锤线右侧,带有方形标记的紫色线通常位于带有菱形标记的绿色线的上方);与之相反,在特征分量谱的下部,1975-2015年生产率与舒适度经验冲击的载荷通常较大,其对应收敛到稳态的速度较快(在蓝色实锤线左侧,带有菱形标记的绿色线通常位于带有方形标记的紫色线的上方)。这一结果事实上与之前的证据一致,也即初始条件解释了在本文样本期间所观测到经济向稳态收敛速度下降的大部分原因。结果也表明:1975年与稳态缺口的载荷加权(Loadings-weighted)平均半衰期为38年,而1975-2015年生产率与舒适度冲击的载荷加权平均半衰期为20年。因此,在样本期间,尽管经济相对较快地适应了所观测到的生产率与舒适度冲击,但从稳态调整到状态变量的初始缺口需要更长的时间。

5.4.2 初始条件与收敛性

现在,本文将采用谱分析方法进一步探讨资本与劳动力动态在塑造初始条件影响中的作用。在图4中,本文基于命题4将1975年稳态资本与劳动状态变量的初始缺口分解为不同特征分量的贡献。在图4左边的子图中,展示了资本与稳态的总对数偏差(纵轴)、劳动力与稳态的总对数偏差(横轴)。在中间子图中,展示了收敛到稳态速度最慢的前10个特征分量的对数偏差。在右边的子图中,展示了剩余88个特征分量的对数偏差,这些特征分量拥有相对较快的收敛速度。显然,左边子图中的总对数偏差是中间与右边子图中对数偏差的加总,因此,本文将三个子图中保持一致的横轴尺度,不过允许纵轴存在不同的尺度。为了更好地分析问题,本文还用灰色表征锈带地区、红色表征太阳带地区、蓝色表征其他北方州、棕色表征其他南方州,圆圈的大小为其相对人口的多少。

(1)从左子图可以看出,美国各州之间总的资本与劳动对稳态的缺口呈现正相关关系,与前文所分析较缓慢的稳态收敛速度一致。锈带地区(灰色)显示出明显的向右倾向,人口高于稳态水平;而太阳带地区(红色)则显示出明显的向左倾向,人口低于稳态水平。从纵轴来看,所有州的资本存量均低于稳态水平,再次表明资本动态的重要性。总的来说,锈带地区资本与稳态的偏差要小于太阳带地区。

(2) 从中间子图中可以看出，资本与劳动对稳态缺口间的正相关关系大部分是由收敛到稳态最慢的前 10 位特征分量所驱动的。这 10 个特征分量具有非常强的正相关性，并且在锈带地区（位于右上方）与太阳带地区（位于左下方）间存在显著的地理特征分割。鉴于地理特征在劳动力迁移流动的引力方程中具有重要影响，因此这种地理分割也导致其收敛到稳态的速度得到下降。

(3) 与之相反，从右子图中可以看出，其余 88 个特征分量在资本与劳动对稳态缺口的正相关关系较弱，劳动力与稳态的缺口在横轴上的变化较小，并且锈带地区与太阳带地区之间的地理分割也较不明显。

因此，前文所发现的基于初始条件向稳态的缓慢收敛，主要是因为资本与劳动对稳态的缺口之间具有较强的相关性（初始稳态缺口在特征分量上具有较大载荷），以及人口高于稳态的锈带地区与人口接近或低于稳态的太阳带地区之间明显的地理分割。

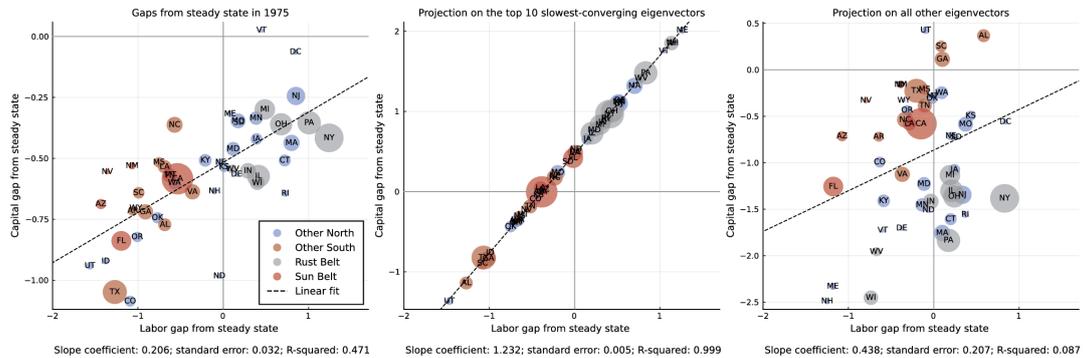


FIGURE 4.—Decomposition of Gaps of State Variables from Steady State in 1975. *Note:* Left panel shows the 1975 log deviations of capital and labor from steady state for each U.S. state; middle and right panels decompose these 1975 steady-state gaps into the contributions of the top 10 eigencomponents with the slowest convergence to steady state (middle panel) and the remaining 88 eigencomponents (right panel).

图 4 1975 年稳态下状态变量缺口的分解

5.4.3 基本面冲击

接下来，本文进一步探讨资本与劳动在塑造基本面冲击影响中的作用。在图 5 中，本文基于命题 4 将 1975-2015 年生产率与舒适度的经验冲击分解为不同特征分量的贡献：①在图 5 左子图中，展示了总体的舒适度经验冲击（纵轴）与生产率经验冲击（横轴）；②在图 5 中间子图中，展示了收敛到稳态速度最慢的前 10 位特征分量的舒适度与生产率经验冲击；③在图 5 右子图中，展示了剩余 88 个特征分量的舒适度与生产率经验冲击。与前一小节一致，三个子图中横轴尺度保持一致，且分地理区域绘制不同颜色以示区分，并且每个州的圆圈大小均表示为其相对人口的多少。

(1) 从左子图可以看出，1975-2015 年的生产率与舒适度经验冲击间存在负相关关系，注意更高的生产率将同时提高资本与劳动的边际产出，从而让两个状态变量同时上升。与

之相反，更高的舒适度只会直接提升劳动者的效用，从而提升劳动状态变量。因此，生产率与舒适度经验冲击的负相关关系，表明资本与劳动对稳态的缺口也呈负相关关系，从而意味着更快的收敛速度，与前文初始条件的结果形成鲜明对比（在附录 S.6.6.3 与附录图 S.6.10 中，本文提供了更进一步的分析）。

（2）从中间子图可以看出，在前 10 位收敛速度最慢的特征分量中，生产率与舒适度的经验冲击呈现出很强的正相关关系。不过，与左子图中总体的生产率与舒适度经验冲击相比，这些特征分量在横轴上的绝对值变化要更小得多。因此，虽然这 10 个特征分量再一次表现出向稳态更低的收敛速度，但其受生产率与舒适度经验冲击的影响相对较小。

（3）从右子图可以看出，在剩下的 88 个特征分量中，生产率与舒适度的经验冲击呈现出较强的负相关关系，并且在横轴上生产率冲击的绝对变化幅度较大。因此，在左子图中总的生产率与舒适度经验冲击的负相关关系主要是来源于这剩下的 88 个特征分量，这些特征分量向稳态的收敛速度较快。而与前文初始条件的结果相比，锈带地区与太阳带地区在基本面冲击的响应中并没有明显的地理分割。

综上所述，本文发现：相对于初始条件，基本面冲击对于收入收敛速度下降的影响相对较小，因为基本面冲击更多地依赖于向稳态收敛速度较快的特征分量。

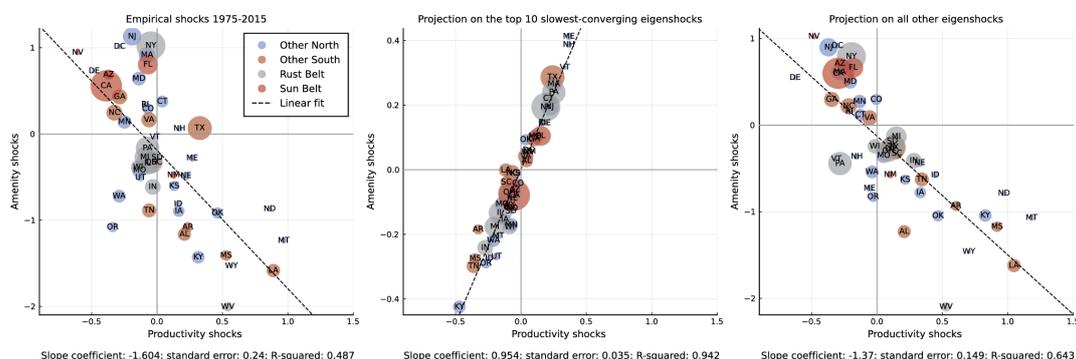


FIGURE 5.—Decomposition of Productivity and Amenity Shocks from 1975–2015. *Note:* Left panel shows log productivity and amenity shocks from 1975–2015 for each U.S. state; middle and right panels decompose these productivity and amenity shocks into the contributions of the top 10 eigencomponents with the slowest convergence to steady state (middle panel) and the remaining 88 eigencomponents (right panel).

图 5 1975-2015 年生产率与舒适度冲击的分解

5.4.4 脉冲响应分析

为了进一步说明资本与劳动力动态在塑造地区持续性与异质性影响中的作用，现在考虑对生产率与舒适度经验冲击的个体效应。本文从 1975 年隐含的基本面开始，分析了美国每个州在地区冲击后资本与劳动状态变量的脉冲响应。考虑到现实中经济活动从锈带地区长期迁移向太阳带地区，下面本文报告了 1975-2015 年密歇根州相对生产率的经验冲击（下降 15%）与同期亚利桑那州相对舒适度的经验冲击（上升 34%）的结果。在图 6 中，本

文展示了美国各州人口份额对密歇根州相对生产率下降 15% 经验冲击的响应：

(1) 在图 6 (a) 左边的子图中，展示了密歇根州人口份额从初始稳态向新稳态转移路径的对数偏差。不难发现，密歇根州相对生产率的下降导致了人口外流，并且由于迁移摩擦与资本调整，人口外流是随着时间逐渐发生的。

(2) 在图 6 (a) 右边的子图中，展示了所有其他州的人口份额与初始稳态的对数偏差。本文用带有圆圈标记的蓝色线表示密歇根州的相邻州，用灰色线表示其他州，不难发现，本文的模型可以为每个州呈现出不同的非单调动态路径。最初，密歇根州相对生产率的下降将提高相邻州的人口份额，因为劳动者搬迁到相邻州具有较低的迁移成本，然而随着经济逐渐适应新的稳态，这些相邻州人口份额开始下降，甚至可能低于初始稳态。从直觉来看，对于离密歇根州较远的州，劳动者逐渐体验到有利的特殊流动性冲击，而由于密歇根州生产率的下降缩小了其邻近地区的市场规模，这将可能导致这些邻近地区在新的稳态下吸引力降低。模拟结果也表明，在新的稳态下，所有其他州的人口份额相对于初始稳态均有所上升。

(3) 在图 6 (b) 的两幅子图中，展示了在收敛速度较快的 88 个底部特征分量（相对于前 10 位最慢收敛的特征分量）人口份额的对数偏差。在左子图中，黑色实线表示密歇根州人口份额与稳态的总体对数偏差（与图 6 (a) 相同），而黑色虚线则表示由 88 个底部特征分量驱动的分量对数偏差。在右子图中，带有圆圈标记的蓝色实线表示密歇根相邻州人口份额与稳态的总体对数偏差（与图 6 (a) 相同），带有圆圈标记的蓝色虚线表示由 88 个底部特征分量驱动的对数偏差，灰色线表示所有其他州的人口份额的对数偏差（与图 6 (a) 相同）。比较这两组蓝色线，不难看出，正是由于 88 个收敛速度较快的底部特征分量驱动了密歇根相邻州人口份额最初的提升。

(4) 在图 6 (c) 的两幅子图中，展示了在收敛速度最慢的前 10 位特征分量人口份额的对数偏差。在左子图中，黑色实线表示密歇根州人口份额与稳态的总体对数偏差（与图 6 (a) 相同），而黑色虚线则表示由前 10 位特征分量驱动的分量对数偏差。在右子图中，带有圆圈标记的蓝色实线表示密歇根相邻州人口份额与稳态的总体对数偏差（与图 6 (a) 相同），带有圆圈标记的蓝色虚线表示由前 10 位特征分量驱动的对数偏差，灰色线表示所有其他州的人口份额的对数偏差（与图 6 (a) 相同）。比较这两组蓝色线，不难看出，正是这些特征分量向稳态的缓慢收敛特征，导致了密歇根相邻州人口份额的最终下降。因此，在图 6 (a) 中密歇根相邻州的总体非单调动态路径，事实上既受到生产率调整的缓慢特征分量也受到快速特征分量的共同影响（在附录 S.6.6.5 的附录图 S.6.11 中，展示了美国各州资本存量在转移路径上的对应演变，从这些资本与劳动的状态变量中，可以非常方便地求解所有其他感兴趣的内生变量，包括劳动者与业主的流动效用和福利变化）。

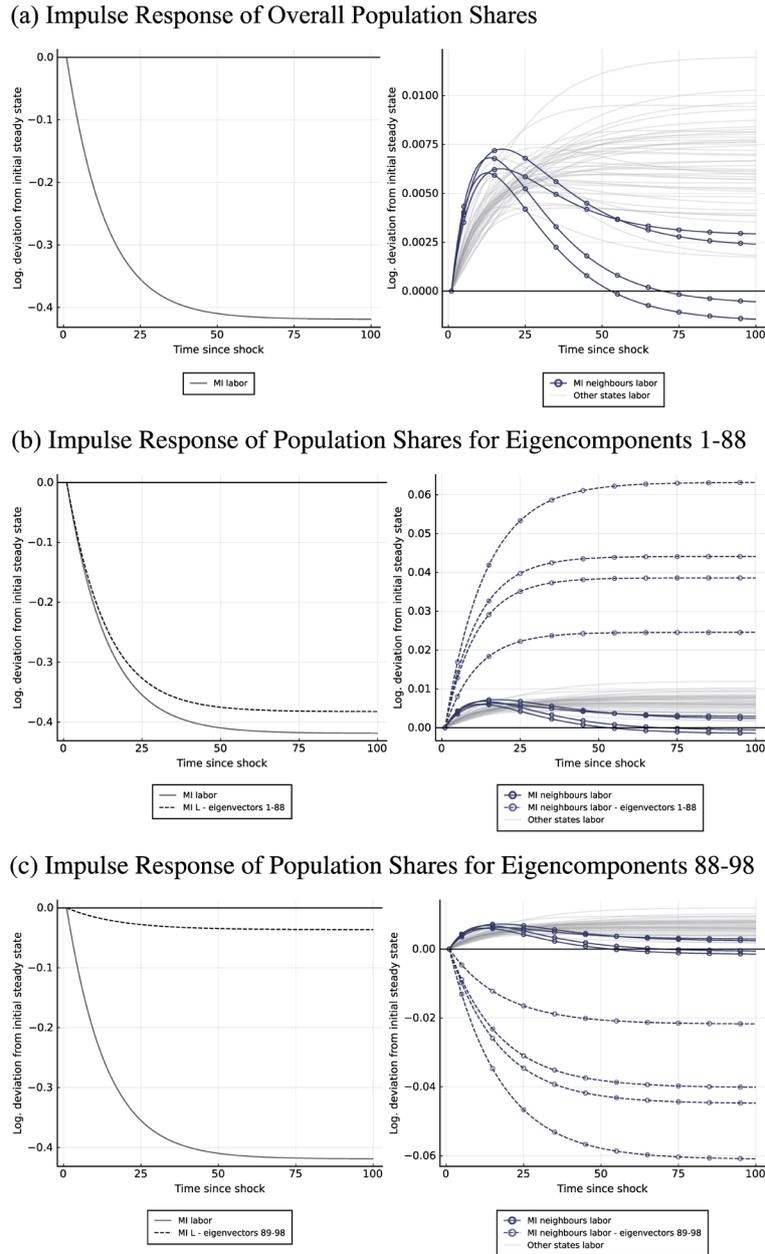


FIGURE 6.—Impulse Response of Population Shares for a 15% Decline in Productivity in Michigan. *Note:* Top-left panel shows overall log deviation of Michigan’s population share from steady state (vertical axis) against time in years (horizontal axis) for a 15% decline in Michigan’s productivity (its empirical relative decline in productivity from 1975–2015); Top-right panel shows overall log deviation of other states’ population shares from steady state (vertical axis) against time in years (horizontal axis) for this shock to Michigan’s productivity; blue lines show Michigan’s neighbors; gray lines show other states; Middle and bottom panels decompose this overall impulse response into the contribution of eigencomponents 1–88 (fast convergence) and 88–98 (slow convergence), respectively.

图 6 密歇根州人口份额对生产率下降 15%的脉冲响应

还需要指出的是：在附录 S.6.6.6 中，本文还报告了 1975-2015 年亚利桑那州相对舒适度经验冲击（提升 34%）的类似结果，密歇根州相对生产率的下降将降低其人口份额，而亚利桑那州相对舒适度的上升将增加其人口份额。在这次冲击中，本文再次发现了经验冲击影响在各州间的持续性与异质性。考虑到经济对经验冲击的调整存在缓慢的以及快速的

特征分量组成部分，并且其重要性将随着时间的推移而发生变化，因此不同个体州仍然会出现不同的动态路径，虽然在舒适度冲击的案例中将不那么明显。

5.4.5 收敛速度的比较静态

最后，本文所提出的谱分析方法还允许基于比较静态分析的思想，研究模型参数变化将如何影响经济收敛到稳态的速度。事实上，在非线性模型中实现这一点是非常具有挑战性的，因为经济收敛到稳态的速度取决于生产率与舒适度冲击下每个地区的资本与劳动状态变量的变化。因此，为了充分描述模型参数变化对非线性模型收敛速度的影响，需要对经济转移路径进行反事实分析，以应对难以确定的生产率与舒适度冲击。

本文所提出的谱分析方法存在以下两大特质：第一，所有可能的生产率与舒适度冲击集均能由特征冲击集扩张（Span）而成；第二，对于冲击矩阵 \mathbf{R} 和转移矩阵 \mathbf{P} ，可以基于已观测的数据矩阵 $(\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{E})$ 和结构参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ 求解获得。因此，对于任何模型参数的改变，本文的方法可以立即基于观测数据求解整个特征冲击的特征值谱（以及相应的半衰期）。由于特征冲击扩张了所有可能的生产率与舒适度的经验冲击，因此对于收敛速度如何受模型参数影响的问题可以方便地转变为求解参数变化对半衰期的影响。

在图 7 中，展示了不同模型参数取值对于整个特征冲击谱的收敛到稳态半衰期的影响。每个子图中均包括了某个参数差异，而其他参数则保持不变。本文在纵轴上展示了经济收敛到稳态的半衰期，而在横轴上则基于半衰期升序的序列将特征分量进行排序。

(1) 从左上子图可以看出，较低的跨期替代弹性 ψ 意味着较长的半衰期（也即更慢的收敛速度），这是因为如果业主对消费的跨期替代性下降，那么其对于投资的反应也将下降。从中上子图可以看出，较高的区际迁移弹性（也即 ρ 下降）对稳态收敛速度的影响并不明确：较高的迁移弹性将提升劳动力流动对资本积累的响应程度，当资本与劳动对稳态缺口为正相关时，将导致更长的半衰期；而当资本与劳动对稳态缺口为负相关时，则将导致较短的半衰期。从右上子图可以看出，较高的贴现系数 β 通常将导致更长的半衰期，因为业主将会有更高的储蓄率（未来消费效用相对提升），从而导致内生资本积累增加，并放大生产率与舒适度的冲击，使得经济对于冲击的调整时间相对变长。

(2) 在右下子图中，本文改变了单一可贸易部门与单一不可贸易部门的相对支出份额。不难看出，可贸易份额（ γ ）的下降将导致半衰期变长，因为较低的可贸易份额将使得冲击影响更多集中在当地，从而使得达到稳态的调整需要更多的资本与劳动力在不同地区区间重新分配。从中下子图中可以看出，更高的贸易弹性（ θ ）通常意味着更长的半衰期，因为它增加了静态贸易模型中生产与消费的响应能力，从而也需要更多的资本与劳动力在不同地区区间的重新分配。从左下子图中可以看出，较低的劳动力份额（ μ ）将导致更长的半衰期，因为劳动力份额的下降将相对提升资本积累的作用，从而再次放大了生产率与舒适度冲击的影响，经济需要更长的时间对其进行调整。

(3) 在左下子图中，本文还用黑色点虚线展示了模型不存在资本的特殊情况下，也即仅存在 N 个状态变量和特征冲击（常规模型中有 $2N$ 个）。左下子图的情况再次证明了本文一再表明的资本与劳动的动态交互效应，当引入资本要素时（劳动力份额大于 0），向稳态收敛的速度将下降，资本与劳动状态变量间的缺口在地区间呈现正相关关系（最大的 N 个特征值将变得更大）；相反，当资本与劳动状态变量间的缺口在地区间呈现负相关关系时，稳态收敛速度将变快（加入比黑色点虚线更小的额外 N 个特征值）。

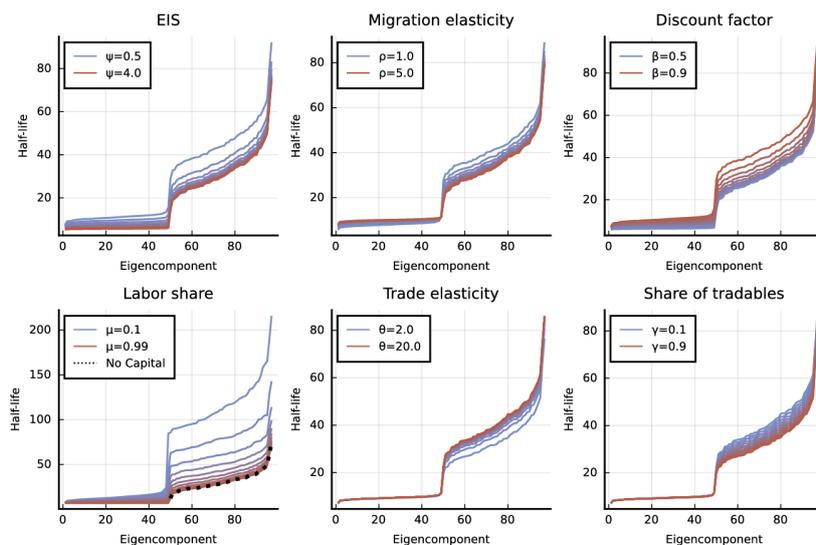


FIGURE 7.—Half-lives of Convergence to Steady State for Alternative Parameter Values. *Note:* Half-lives of convergence to steady state for each eigenshock for alternative parameter values in the 1975 steady state; vertical axis shows half-life in years; horizontal axis shows the rank of the eigenshocks in terms of their half-lives for our baseline parameter values (with one the lowest half-life); each panel varies the noted parameter, holding constant the other parameters at their baseline values; the blue and red solid lines denote the lower and upper range of the parameter values considered, respectively; each of the other eight lines in between varies the parameters uniformly within the stated range; the thick black dotted line in the bottom-left panel displays half-lives for the special case of our model without capital, which corresponds to the limiting case in which the labor share (μ) converges to one.

图 7 替代参数值收敛到稳态的半衰期

5.5 多部门量化分析

在最后的实证部分，本文基于区域-部门特定资本（Region-sector Specific Capital）进行多部门拓展分析，更多的细节详见附录 S.6.8。

在多部门的拓展研究中，本文再次发现其收敛到稳态的速度较慢，尽管比单部门的基准模型更快——平均半衰期为 7 年，最高半衰期为 35 年。这一结果是由地区-部门迁移矩阵的性质所决定的，也即劳动力在州内不同部门的流动要强于在不同州间的流动。换句话说，冲击对地区劳动力市场的持久性影响取决于其所导致的劳动力重新分配是发生于产业间抑或是地区间。同时，本文也再次发现稳态收敛的半衰期与资本和劳动状态变量缺口间相关性存在很强的正相关关系。

因此，在多部门模型中，与前述单部门模型一致，本文仍然发现：正是资本积累与迁

移动态之间的相互作用，塑造了地区冲击的持续性和异质性影响。

6. 结论

经济活动对于地区冲击的响应，是经济学研究中的一个经典问题。一般而言，这种响应可能是渐进的，因为存在资本结构投资与迁移摩擦。然而，对于这个经典问题的动态建模存在一个关键挑战，也即：代理人的前瞻性投资与迁移选择均取决于彼此之间在所有地区与所有未来时期内的相互影响，这将会导致一个可能存在的基于现实地区数量的无比庞大的状态空间。

本文主要做出了两个方面的贡献：第一，开发了一个易于处理的理论框架，将前瞻性资本积累引入动态离散的迁移选择模型。并且克服了高维状态空间的挑战，基于稳态均衡与对现有动态精确帽子代数技术的推广，将投资纳入模型；第二，对模型进行了线性化，从而可以采用谱分析技术描述经济的转移路径。并且为转移路径提供了闭式解，包括捕捉了冲击初始影响的冲击矩阵和控制状态变量更新的转移矩阵。

本文研究表明，状态变量对任何基本面冲击的动态响应都可以用该转移矩阵的特征向量和特征值进行表征。通过引入特征冲击的概念（对状态变量的初始冲击影响等于转移矩阵的特征向量），任何特征冲击向稳态的收敛速度仅取决于转移矩阵的相应特征值。进一步的，本文证明了任何经验冲击都可以表示为这些特征冲击的线性组合，其权重可以从经验冲击对特征冲击的回归中求解获得。

本文基于谱分析方法分析了资本积累与迁移动态间系统性的相互作用。结果表明：当资本与劳动对稳态的缺口在地区间为正相关关系时，经济向稳态收敛的速度就较慢，此时资本与劳动要么同时高于稳态水平，要么同时低于稳态水平。其原因在于生产技术中资本与劳动边际产品间的动态调整，当资本高于稳态水平时，劳动的边际生产率将相对提高，从而抑制了劳动的下调；反之亦然。

本文展示了资本积累与迁移动态间交互作用在理解所观测到的美国各州收入收敛速度下降，以及地方冲击的持续且异质性影响方面的重要性。本文进一步表明：对于所观测到的收入收敛速度下降，很大程度上是由初始条件所决定，而并非由基本面冲击模式的变化所决定。资本与劳动力动态都有可能导致收入收敛速度的下降，而将前瞻性投资纳入动态离散移民选择模型对于解释这种关系是关键的。

本文使用谱分析方法将资本与劳动状态变量对稳态的初始缺口和基本面经验冲击进行分解，结果表明：初始稳态缺口在收敛缓慢的特征分量上具有较大载荷，因为资本与劳动对稳态的缺口在地区间是正相关的；与之相反，生产率与舒适度经验冲击则在收敛较快的特征分量上具有较大载荷，因为生产力与舒适度冲击在地区间是负相关的，从而导致了资本与劳动对稳态缺口的负相关关系。这两个结果共同表明，初始条件在很大程度上解释了

所观测到的收入收敛随时间推移而下降的原因。

本文研究继续表明，由于在经济转移路径上缓慢的与快速的特征分量间相对重要性的动态调整，将导致不同个体地区状态变量的非单调动态变化。例如，对于密歇根州相对生产率下降 15%的经验冲击，本文发现密歇根相邻州首先经历了人口流动，然后又经历了人口外流，在新稳态中其最终的人口份额甚至低于初始稳态。

综上所述，本文的研究结果突出了资本积累与迁移动态之间丰富的相互作用关系，并基于谱分析方法对其中的动态变化系统的动力源提供了诸多洞见。

7. 附录 B: 基准动态空间模型

在这个附录中，本文报告了单部门可交易基准模型的详细推导过程。模型基本环境详见表 1，现在开始展示基准动态空间模型的详细推导过程。

B.1 资本积累方程

联立业主跨期效用函数 (5) 以及预算约束 (6)，则业主跨期最优化问题可表示为：

$$\begin{aligned} \max_{\{c_{t+s}^k, k_{t+s+1}\}_{s=0}^{\infty}} \mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} \beta^{t+s} \frac{(c_{t+s}^k)^{1-1/\psi}}{1-1/\psi}, \\ \text{s.t. } p_{it} c_{it}^k + p_{it} (k_{it+1} - (1-\delta)k_{it}) = r_{it} k_{it}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

现在证明**引理 1**：

为了简化符号表示，首先去掉地区下标 i 。考虑业主在所有 t 时期均面临其财富 k_t 的一个线性回报 R_t ，令 $v(k_t; t)$ 代表 t 时期的价值方程，则业主消费-储蓄问题可递归改写为：

$$v(k_t; t) = \max_{\{c_t, k_{t+1}\}} \frac{c_t^{1-1/\psi}}{1-1/\psi} + \beta \mathbb{E}_t v(k_{t+1}; t+1), \quad \text{s.t. } c_t + k_{t+1} = R_t k_t,$$

其中，为了聚焦于本次证明，本文用简单的符号 c 代替 c^k ，作为业主的消费决策。本文猜测并证明 (Guess-and-verify) 存在 a_t 、 ζ_t 使得 $v(k; t) = \frac{(a_t R_t k_t)^{1-1/\psi}}{1-1/\psi}$ ，并且最优化条件下存在 $c_t = \zeta_t R_t k_t$ 。在这个猜想下， $v_k(k_t; t) = \frac{a_t^{1-1/\psi} R_t^{1-1/\psi} k_t^{1-1/\psi}}{1-1/\psi}$ ，拉格朗日函数可设为：

$$\mathcal{L}_t = \frac{c_t^{1-1/\psi}}{1-1/\psi} + \beta \mathbb{E}_t v(k_{t+1}; t+1) + \xi_t [R_t k_t - c_t - k_{t+1}].$$

基于一阶条件 (F.O.C.) 可得：

$$\begin{aligned} \{c_t\} \quad c_t^{-1/\psi} &= \xi_t, \\ \{k_{t+1}\} \quad \xi_t &= \beta k_{t+1}^{-1/\psi} \mathbb{E}_t \left[a_{t+1}^{1-1/\psi} R_{t+1}^{1-1/\psi} \right]. \end{aligned}$$

也即：

$$c_t = \beta^{-\psi} k_{t+1} \mathbb{E}_t \left[a_{t+1}^{1-1/\psi} R_{t+1}^{1-1/\psi} \right]^{-\psi}. \quad (\text{B.2})$$

由包络条件（Envelope Condition） $v_k(k_t; t) = \xi_t R_t$ 可得：

$$a_t^{1-1/\psi} R_t^{1-1/\psi} k_t^{-1/\psi} = c_t^{-1/\psi} R_t. \quad (\text{B.3})$$

将前文所猜测的 $c_t \equiv \zeta_t R_t k_t$ 代入包络条件 B.3 中，可得：

$$a_t^{1-\psi} = \zeta_t.$$

由预算约束条件可得 $k_{t+1} = (1 - \zeta_t) R_t k_t$ ，将其代入公式 B.2 可得：

$$\begin{aligned} \zeta_t &= \beta^{-\psi} \mathbb{E}_t \left[a_{t+1}^{1-1/\psi} R_{t+1}^{1-1/\psi} \right]^{-\psi} (1 - \zeta_t) \\ &\Leftrightarrow \zeta_t^{-1} = 1 + \beta^\psi \mathbb{E}_t \left[R_{t+1}^\psi \zeta_{t+1}^{-1/\psi} \right]^\psi. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

在对数效用函数的特殊情况下（ $\psi = 1$ ），业主的最优消费与储蓄率与未来的资本回报率无关，因此对于任意 t 均存在 $\zeta_t = (1 - \beta)$ ，与 Moll（2014）的研究一致。

B.2 稳态存在且唯一性

现在，基于本文一般均衡方程组公式（10-16）来表征稳态（非时变基本面条件 $\{z_i, b_i, \tau_{ni}, \kappa_{ni}\}$ 以及稳定内生变量组 $\{v_i^*, w_i^*, R_i^*, \ell_i^*, k_i^*\}$ ）的唯一存在性。给定不随时间改变的基本面条件，可以将公式中的期望值化简，也即： $\mathbb{E}_t v_{gt+1}^w = v_{gt+1}^w$ 。

B.2.1 资本劳动比

在稳态下，存在以下条件： $k_{it+1} = k_{it} = k_i^*$ ， $c_{it+1} = c_{it} = c_i^*$ ，以及 $\zeta_{it+1} = \zeta_{it} = \zeta_i^*$ ，从而有 $1 - \zeta_i^* = \beta$ 。将这些条件代入资本积累公式（11），可解得稳态下资本-劳动比：

$$\frac{k_i^*}{\ell_i^*} = \frac{\beta}{1 - \beta(1 - \delta)} \frac{1 - \mu}{\mu} \frac{w_i^*}{p_i^*}. \quad (\text{B.5})$$

B.2.2 价格指数

基于稳态下资本-劳动比，公式（10）中的价格指数可改写如下：

$$\begin{aligned} (p_n^*)^{-\theta} &= \sum_{i=1}^N \psi \tilde{\tau}_{ni} (w_i^*)^{-\theta\mu} (p_i^*)^{-\theta(1-\mu)}, \\ \psi &\equiv \left(\frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\beta} \right)^{-\theta(1-\mu)}, \quad \tilde{\tau}_{ni} \equiv (\tau_{ni} / z_i)^{-\theta}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

B.2.3 产品市场出清条件

基于稳态下资本-劳动比，公式（12）中的商品市场出清条件也可改写如下：

$$\ell_i^* (w_i^*)^{1+\theta\mu} (p_i^*)^{\theta(1-\mu)} = \sum_{n=1}^N \psi \tilde{\tau}_{ni} (p_n^*)^\theta w_n^* \ell_n^*. \quad (\text{B.7})$$

B.2.4 价值方程

公式（14）中的价值方程也可以改写为：

$$\exp\left(\frac{\beta}{\rho} v_n^{w*}\right) = \left(\frac{w_n^*}{p_n^*}\right)^{\beta/\rho} \phi_n^\beta, \quad \phi_n \equiv \sum_{g=1}^N \tilde{\kappa}_{gn} \exp\left(\frac{\beta}{\rho} v_g^{w*}\right) \quad (\text{B.8})$$

基于上式对 ϕ_n 的定义，显然有：

$$\phi_n = \sum_{g=1}^N \tilde{\kappa}_{gn} (p_g^*)^{-\beta/\rho} (w_g^*)^{\beta/\rho} \phi_g^\beta. \quad (\text{B.9})$$

B.2.5 劳动力流动条件

公式 (15) 中的劳动力流动条件可改写为：

$$\ell_g^* = \sum_{i=1}^N \tilde{\kappa}_{gi} \exp\left(\frac{\beta}{\rho} v_g^{w*}\right) \phi_i^{-1} \ell_i^*, \quad \phi_i \equiv \sum_{m=1}^N \tilde{\kappa}_{mi} \exp\left(\frac{\beta}{\rho} v_m^{w*}\right).$$

现在代入价值方程式 (B.8)，可得：

$$(p_g^*)^{\beta/\rho} (w_g^*)^{-\beta/\rho} \ell_g^* \phi_g^{-\beta} = \sum_{i=1}^N \tilde{\kappa}_{gi} \ell_i^* \phi_i^{-1}. \quad (\text{B.10})$$

B.2.6 方程组

将以上结果汇总，则模型稳态 $\{p_i^*, w_i^*, \ell_i^*, \phi_i^*\}$ 可由以下方程组解出：

$$(p_i^*)^{-\theta} = \sum_{n=1}^N \psi \tilde{\tau}_{in} (p_n^*)^{-\theta(1-\mu)} (w_n^*)^{-\theta\mu}, \quad (\text{B.11})$$

$$(p_i^*)^{\theta(1-\mu)} (w_i^*)^{1+\theta\mu} \ell_i^* = \sum_{n=1}^N \psi \tilde{\tau}_{ni} (p_n^*)^\theta w_n^* \ell_n^*, \quad (\text{B.12})$$

$$(p_i^*)^{\beta/\rho} (w_i^*)^{-\beta/\rho} \ell_i^* (\phi_i^*)^{-\beta} = \sum_{n=1}^N \tilde{\kappa}_{in} \ell_n^* (\phi_n^*)^{-1}, \quad (\text{B.13})$$

$$\phi_i^* = \sum_{n=1}^N \tilde{\kappa}_{ni} (p_n^*)^{-\beta/\rho} (w_n^*)^{\beta/\rho} (\phi_n^*)^\beta, \quad (\text{B.14})$$

其中，符号的定义如下：

$$\psi \equiv \left(\frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta}\right)^{-\theta(1-\mu)}, \quad \tilde{\tau}_{ni} \equiv (\tau_{ni} / z_i)^{-\theta}, \quad \phi_i^* \equiv \sum_{n=1}^N \tilde{\kappa}_{ni} \exp\left(\frac{\beta}{\rho} v_n^{w*}\right), \quad \tilde{\kappa}_{in} \equiv (\kappa_{in} / b_n^\beta)^{-1/\rho}.$$

现在开始证明命题 1：使用 [Allen, Arkolakis, and Li \(2020\)](#) 的方法，基于模型结构参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ 系数矩阵 \mathbf{A} 的性质，为稳态的唯一存在性提供充分条件。

方程组公式 (B.11-14) 左侧变量的指数可以表示为以下矩阵：

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -\theta & 0 & 0 & 0 \\ \theta(1-\mu) & (1+\theta\mu) & 1 & 0 \\ \beta/\rho & -\beta/\rho & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

同理，其右侧变量的指数可以表示为：

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\theta(1-\mu) & -\theta\mu & 0 & 0 \\ \theta & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\beta/\rho & \beta/\rho & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

令 $A \equiv |\Gamma \Lambda^{-1}|$ ，其谱半径（绝对值最大的特征值）为 $\rho(A)$ ，基于 [Allen, Arkolakis, and Li \(2020\)](#) 的理论 1 (Theorem 1)，存在唯一稳态均衡的条件为 $\rho(A) \leq 1$ 。

接下来，本文将针对准对称 (Quasi-symmetric) 贸易与迁移成本的情形，推导出一个更清晰的充分条件，也即： $\tau_{in} = \tilde{\tau}_{in} \tilde{\tau}_i^a \tilde{\tau}_n^b$ 、 $\kappa_{in} = \tilde{\kappa}_{in} \tilde{\kappa}_i^c \tilde{\kappa}_n^d$ ，其中 $\tilde{\tau}_{in} = \tilde{\tau}_{ni}$ 且 $\tilde{\kappa}_{in} = \tilde{\kappa}_{ni}$ （在本文实证应用部分已进行假设）。在这个情形下，可以将方程组公式 (B.11-14) 改写为：

$$p_i^{-\theta} (\tilde{\tau}_i^a)^{-1} = \sum_{n=1}^N \tilde{\tau}_{in} \tilde{\tau}_n^b p_n^{-\theta} q_n^{-\theta\mu}, \quad (\text{B.15})$$

$$p_i^{\theta-1} q_i^{1+\theta\mu} \ell_i (\tilde{\tau}_i^b)^{-1} = \sum_{n=1}^N \tilde{\tau}_{in} \tilde{\tau}_n^a p_n^{\theta-1} q_n^{\theta-1} \ell_n, \quad (\text{B.16})$$

$$q_i^{-\beta/\rho} \ell_i \phi_i^{-\beta} (\tilde{\kappa}_i^c)^{-1} = \sum_{n=1}^N \tilde{\kappa}_{in} \tilde{\kappa}_n^d \ell_n \phi_n^{-1}, \quad (\text{B.17})$$

$$\phi_i (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1} = \sum_{n=1}^N \tilde{\kappa}_{in} \tilde{\kappa}_n^c q_n^{\beta/\rho} \phi_n^\beta. \quad (\text{B.18})$$

基于公式 (B.18) 可知：

$$1 = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{\kappa}_{in} \tilde{\kappa}_n^c q_n^{\beta/\rho} \phi_n^\beta}{\phi_i (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1}}.$$

将等式 (B.17) 左边乘以 $\sum_{n=1}^N \frac{\tilde{\kappa}_{in} \tilde{\kappa}_n^c q_n^{\beta/\rho} \phi_n^\beta}{\phi_i (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1}}$ ，并且将 $(\tilde{\kappa}_i^c)^{-1} \phi_i^{-\beta} q_i^{-\beta/\rho}$ 移项至等式右边：

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{\kappa}_{in} \tilde{\kappa}_n^c q_n^{\beta/\rho} \phi_n^\beta}{\phi_i (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1}} \ell_i &= \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{\kappa}_{in} \tilde{\kappa}_n^c \phi_i^\beta q_i^{\beta/\rho}}{\phi_n (\tilde{\kappa}_n^d)^{-1}} \ell_n, \\ \Leftrightarrow \frac{\ell_i \tilde{\kappa}_i^d / \phi_i}{\sum_{n=1}^N \tilde{\kappa}_{in} \ell_n \tilde{\kappa}_n^d / \phi_n} &= \frac{\tilde{\kappa}_i^c \phi_i^\beta q_i^{\beta/\rho}}{\sum_{n=1}^N \tilde{\kappa}_{in} \tilde{\kappa}_n^c q_n^{\beta/\rho} \phi_n^\beta}. \end{aligned}$$

令 $\gamma_i \equiv \frac{\ell_i \tilde{\kappa}_i^d / \phi_i}{\sum_{n=1}^N \tilde{\kappa}_{in} \ell_n \tilde{\kappa}_n^d / \phi_n}$ ，则有：

$$\begin{aligned} \ell_i \tilde{\kappa}_i^d / \phi_i &= \sum_{n=1}^N \gamma_i \tilde{\kappa}_{in} \ell_n \tilde{\kappa}_n^d / \phi_n, \\ \tilde{\kappa}_i^c \phi_i^\beta q_i^{\beta/\rho} &= \sum_{n=1}^N \gamma_i \tilde{\kappa}_{in} \tilde{\kappa}_n^c q_n^{\beta/\rho} \phi_n^\beta. \end{aligned}$$

基于 Perron-Frobenius 定理，存在某个常数 x 使得 $\ell_i \tilde{\kappa}_i^d / \phi_i = x \tilde{\kappa}_i^c \phi_i^\beta q_i^{\beta/\rho}$ 成立。考虑到 ℓ_i 并由方程组完全确定：如果 $\{\ell_i\}$ 是方程组的解，那么 $\{2\ell_i\}$ 显然也是。鉴于此，在不失一般性的情况下，本文令 $x=1$ 。也即：

$$\ell_i = \tilde{\kappa}_i^c (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1} \phi_i^{1+\beta} q_i^{\beta/\rho}. \quad (\text{B.19})$$

采用同样的策略，将公式 (B.15) 左边化为 1，也即：

$$1 = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{\tau}_n^b \tilde{\tau}_n^a p_n^{-\theta} q_n^{-\theta\mu}}{p_i^{-\theta} (\tilde{\tau}_i^a)^{-1}}.$$

将公式 (B.15) 代入公式 (B.16)，等式左边乘以 $\sum_{n=1}^N \frac{\tilde{\tau}_n^b \tilde{\tau}_n^a p_n^{-\theta} q_n^{-\theta\mu}}{p_i^{-\theta} (\tilde{\tau}_i^a)^{-1}}$ 有：

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{\tau}_n^b \tilde{\tau}_n^a p_n^{-\theta} q_n^{-\theta\mu}}{p_i^{-\theta} (\tilde{\tau}_i^a)^{-1}} p_i^{\theta-1} q_i^{1+\theta\mu+\beta/\rho} \phi_i^{1+\beta} (\tilde{\tau}_i^b)^{-1} \tilde{\kappa}_i^c (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1} &= \sum_{n=1}^N \tilde{\tau}_n^b \tilde{\tau}_n^a p_n^{\theta-1} \phi_n^{1+\beta} q_n^{1+\beta/\rho} \tilde{\kappa}_n^c (\tilde{\kappa}_n^d)^{-1}, \\ \Leftrightarrow \frac{\tilde{\tau}_i^a p_i^{\theta-1} q_i^{1+\beta/\rho} \phi_i^{1+\beta} \tilde{\kappa}_i^c (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1}}{\sum_{n=1}^N \tilde{\tau}_n^a \tilde{\tau}_n^a p_n^{\theta-1} \phi_n^{1+\beta} q_n^{1+\beta/\rho} \tilde{\kappa}_n^c (\tilde{\kappa}_n^d)^{-1}} &= \frac{\tilde{\tau}_i^b p_i^{-\theta} q_i^{-\theta\mu}}{\sum_{n=1}^N \tilde{\tau}_n^b \tilde{\tau}_n^a p_n^{-\theta} q_n^{-\theta\mu}}. \end{aligned}$$

现在定义 $\varphi_i \equiv \frac{\tilde{\tau}_i^a p_i^{\theta-1} q_i^{1+\beta/\rho} \phi_i^{1+\beta} \tilde{\kappa}_i^c (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1}}{\sum_{n=1}^N \tilde{\tau}_n^a \tilde{\tau}_n^a p_n^{\theta-1} \phi_n^{1+\beta} q_n^{1+\beta/\rho} \tilde{\kappa}_n^c (\tilde{\kappa}_n^d)^{-1}}$ ，则有：

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_i^a p_i^{\theta-1} q_i^{1+\beta/\rho} \phi_i^{1+\beta} \tilde{\kappa}_i^c (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1} &= \sum_{n=1}^N \varphi_i \tilde{\tau}_n^a p_n^{\theta-1} \phi_n^{1+\beta} q_n^{1+\beta/\rho} \tilde{\kappa}_n^c (\tilde{\kappa}_n^d)^{-1}, \\ \tilde{\tau}_i^b p_i^{-\theta} q_i^{-\theta\mu} &= \sum_{n=1}^N \varphi_i \tilde{\tau}_n^b \tilde{\tau}_n^a p_n^{-\theta} q_n^{-\theta\mu}. \end{aligned}$$

再由 Perron-Frobenius 定理，存在某个常数 y 使得 $\tilde{\tau}_i^a p_i^{\theta-1} q_i^{1+\beta/\rho} \phi_i^{1+\beta} \tilde{\kappa}_i^c (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1} = y \tilde{\tau}_i^b p_i^{-\theta} q_i^{-\theta\mu}$ 成立。考虑到 p_i 为名义变量，在不失一般性的情况下可令 $y=1$ ，也即：

$$\begin{aligned} p_i^{\theta-1} q_i^{1+\beta/\rho} \phi_i^{1+\beta} \tilde{\tau}_i^a \tilde{\kappa}_i^c (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1} (\tilde{\tau}_i^b)^{-1} &= p_i^{-\theta} q_i^{-\theta\mu}, \\ \Leftrightarrow p_i^{-\theta} &= q_i^{-\frac{\theta(1+\beta/\rho+\theta\mu)}{1-2\theta}} \phi_i^{-\frac{\theta(1+\beta)}{1-2\theta}} e_i, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

其中， $e_i \equiv \left(\tilde{\tau}_i^a \tilde{\kappa}_i^c (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1} (\tilde{\tau}_i^b)^{-1} \right)^{-\frac{\theta}{1-2\theta}}$ 。

将公式 (B.19-20) 代入到公式 (B.15) 和 (B.18) 中，有：

$$q_i^{-\frac{\theta(1+\beta/\rho+\theta\mu)}{1-2\theta}} \phi_i^{-\frac{\theta(1+\beta)}{1-2\theta}} e_i (\tilde{\tau}_i^a)^{-1} = \sum_{n=1}^N \tilde{\tau}_n^b \tilde{\tau}_n^a q_n^{-\frac{\theta(1+\beta/\rho+\theta\mu)}{1-2\theta}} \phi_n^{-\frac{\theta(1+\beta)}{1-2\theta}} e_n,$$

$$\phi_i (\tilde{\kappa}_i^d)^{-1} = \sum_{n=1}^N \tilde{\kappa}_n^c \tilde{\kappa}_n^a q_n^{\beta/\rho} \phi_n^\beta.$$

至此，本文已求得两组方程以及两个内生变量 q_i 、 ϕ_i 。此时，再使用 Allen, Arkolakis, and Li (2020) 的理论 1 (Theorem 1)，不难得到：

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} -\theta \frac{1+\theta\mu+\beta/\rho}{1-2\theta} & -\theta \frac{1+\beta}{1-2\theta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} -\theta \frac{1+\theta\mu+\beta/\rho}{1-2\theta} - \theta\mu & -\theta \frac{1+\beta}{1-2\theta} \\ \beta/\rho & \beta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$A \equiv |\Gamma \Lambda^{-1}| = \begin{bmatrix} \frac{\beta + \rho + \mu\rho - \mu\rho\theta}{\beta + \rho + \mu\rho\theta} & \frac{\mu\rho\theta(\beta + 1)}{\beta + \rho + \mu\rho\theta} \\ \frac{\beta(2\theta - 1)}{\theta(\beta + \rho + \mu\rho\theta)} & \beta - \frac{\beta(\beta + 1)}{\beta + \rho + \mu\rho\theta} \end{bmatrix}.$$

经济存在唯一稳态的条件为系数矩阵 A 的谱半径小于或等于 1 ($\rho(A) \leq 1$)，本文基准模型中的参数值与贸易与迁移成本的经验数据均满足这个条件。

B.3 动态精确帽子代数

下面证明命题 2，也即动态精确帽子代数方法：

给定经济初始配置条件： $(\{\ell_{i0}\}_{i=1}^N, \{k_{i0}\}_{i=1}^N, \{k_{i1}\}_{i=1}^N, \{S_{ni0}\}_{n,i=1}^N, \{D_{ni,-1}\}_{n,i=1}^N)$ ，且预期基本面的一系列变化为 $\{\{\dot{z}_{it}\}_{i=1}^N, \{\dot{b}_{it}\}_{i=1}^N, \{\dot{\tau}_{ijt}\}_{i,j=1}^N, \{\dot{\kappa}_{ijt}\}_{i,j=1}^N\}_{t=1}^{\infty}$ ，则未来经济均衡水平的时间差分序列可由以下非线性方程组解得：

$$\begin{aligned} \dot{D}_{igt+1} &= \frac{\dot{u}_{gt+2} / (\dot{\kappa}_{git+1})^{1/\rho}}{\sum_{m=1}^N D_{imt} \dot{u}_{mt+2} / (\dot{\kappa}_{mit+1})^{1/\rho}}, \\ \dot{u}_{it+1} &= \left(\dot{b}_{it+1} \frac{\dot{w}_{it+1}}{\dot{p}_{it+1}} \right)^{\beta} \left(\sum_{g=1}^N D_{igt} \dot{u}_{gt+2} / (\dot{\kappa}_{git+1})^{1/\rho} \right)^{\beta}, \\ \dot{p}_{it+1} &= \left(\sum_{m=1}^N S_{imt} \left(\dot{\tau}_{imt+1} \dot{w}_{mt+1} \left(\dot{\ell}_{mt+1} / \dot{k}_{mt+1} \right)^{1-\mu} / \dot{z}_{mt+1} \right)^{-\theta} \right)^{-1/\theta}, \\ \dot{\ell}_{gt+1} &= \sum_{i=1}^N D_{igt} \dot{\ell}_{it}, \\ \dot{w}_{it+1} \dot{\ell}_{it+1} &= \sum_{n=1}^N \frac{S_{nit+1} \dot{w}_{nt} \dot{\ell}_{nt}}{\sum_{k=1}^N S_{kit} \dot{w}_{kt} \dot{\ell}_{kt}} \dot{w}_{nt+1} \dot{\ell}_{nt+1}, \\ \dot{S}_{nit+1} &\equiv \frac{\left(\dot{\tau}_{nit+1} \dot{w}_{it+1} \left(\dot{\ell}_{it+1} / \dot{k}_{it+1} \right)^{1-\mu} / \dot{z}_{it+1} \right)^{-\theta}}{\sum_{k=1}^N S_{nkt} \left(\dot{\tau}_{nkt+1} \dot{w}_{kt+1} \left(\dot{\ell}_{kt+1} / \dot{k}_{kt+1} \right)^{1-\mu} / \dot{z}_{kt+1} \right)^{-\theta}}, \\ \zeta_{it+1} &= \beta^{\nu} R_{it+1}^{\nu-1} \frac{\zeta_{it}}{1 - \zeta_{it}}, \\ k_{it+1} &= (1 - \zeta_{it}) R_{it} k_{it}, \\ (R_{it} - (1 - \delta)) &= \frac{\dot{p}_{it+1} \dot{k}_{it+1}}{\dot{w}_{it+1} \dot{\ell}_{it+1}} (R_{it+1} - (1 - \delta)), \end{aligned}$$

其中，定义变换的劳动者效用形式为 $u_{it} \equiv \exp\left(\frac{\beta}{\rho} v_{it}^w\right)$ （与 Caliendo et al. (2018) 类似），同时用上点标表示时间差分变量： $\dot{x}_{it+1} = x_{it+1} / x_{it}$ 。注意到，解这个方程组并不需要基

本面变量 $\{z_{it}\}_{i=1}^N, \{b_{it}\}_{i=1}^N, \{\tau_{ijt}\}_{i,j=1}^N, \{\kappa_{ijt}\}_{i,j=1}^N\}_{t=0}^{\infty}$ 的任何信息。

B.4 模型线性化

B.4.1 比较静态

(1) 支出份额。对支出份额 s_{nit} 进行全微分，可得：

$$d \ln S_{nit} = \theta \left(\sum_{h=1}^N S_{nht} d \ln p_{nht} - d \ln p_{nit} \right). \quad (\text{B.21})$$

(2) 价格。对公式 (2) 中价格规则进行全微分，同时基于公式 (9) 和 (2)，可得：

$$d \ln p_{nit} = d \ln \tau_{nit} + d \ln w_{it} - (1 - \mu) d \ln \chi_{it} - d \ln z_{it}. \quad (\text{B.22})$$

(3) 价格指数。对价格指数进行全微分可得：

$$d \ln p_{nt} = \sum_{m=1}^N S_{nmt} d \ln p_{nmt}. \quad (\text{B.23})$$

(4) 实际收入。对实际收入进行全微分可得：

$$d \ln \left(\frac{w_{it}}{p_{it}} \right) = d \ln w_{it} - \sum_{m=1}^N S_{nmt} [d \ln \tau_{nmt} + d \ln w_{mt} - (1 - \mu) d \ln \chi_{mt} - d \ln z_{mt}], \quad (\text{B.24})$$

(5) 迁移份额。对公式 (16) 中的迁出份额进行全微分，可得：

$$d \ln D_{igt} = \frac{1}{\rho} \left[(\beta \mathbb{E}_t dv_{gt+1} - d \ln \kappa_{git}) - \sum_{h=1}^N D_{iht} (\beta \mathbb{E}_t dv_{ht+1} - d \ln \kappa_{hit}) \right]. \quad (\text{B.25})$$

(6) 产品市场出清。对公式 (12) 产品市场出清条件进行全微分，并代入公式 (B.21-22)，可得：

$$\begin{bmatrix} d \ln w_{it} \\ + d \ln \ell_{it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N T_{int} (d \ln w_{nt} + d \ln \ell_{nt}) \\ + \theta \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N T_{int} S_{nmt} (d \ln \tau_{nmt} + d \ln w_{mt} - (1 - \mu) d \ln \chi_{mt} - d \ln z_{mt}) \\ - \theta \sum_{n=1}^N T_{int} (d \ln \tau_{nit} + d \ln w_{it} - (1 - \mu) d \ln \chi_{it} - d \ln z_{it}) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.26})$$

$$T_{int} \equiv \frac{S_{nit} w_{nt} \ell_{nt}}{w_{it} \ell_{it}}.$$

(7) 人口流动。对公式 (15) 人口流动条件进行全微分，可得：

$$d \ln \ell_{gt+1} = \sum_{i=1}^N E_{git} \left[d \ln \ell_{it} + \frac{1}{\rho} \left(\beta \mathbb{E}_t dv_{gt+1} - d \ln \kappa_{gi} - \sum_{m=1}^N D_{imt} (\beta \mathbb{E}_t dv_{mt+1} - d \ln \kappa_{mit}) \right) \right]. \quad (\text{B.27})$$

(8) 价值方程。对价值方程进行全微分可得：

$$dv_{it} = -\frac{1}{\theta} d \ln S_{iit} + d \ln w_{it} - d \ln p_{iit} + d \ln b_{it} + \beta \mathbb{E}_t dv_{it+1} - \rho d \ln D_{iit}.$$

基于 $d \ln S_{iit}$ 和 $d \ln D_{iit}$ 的全微分，可得：

$$dv_{it} = \left[\begin{array}{c} d \ln w_{it} - \sum_{m=1}^N S_{imt} d \ln p_{imt} \\ + d \ln b_{it} + \sum_{m=1}^N D_{imt} (\beta \mathbb{E}_t dv_{m,t+1} - d \ln \kappa_{mit}) \end{array} \right],$$

其中，由于 $d \ln \kappa_{it} = 0$ ，基于公式 (B.22) 中价格规则的全微分，可将价值方程的全微分公式进一步改写为：

$$dv_{it} = \left[\begin{array}{c} d \ln w_{it} - \sum_{m=1}^N S_{imt} (d \ln \tau_{mt} + d \ln w_{mt} - (1 - \mu) d \ln \chi_{mt} - d \ln z_{mt}) \\ + d \ln b_{it} + \sum_{m=1}^N D_{imt} (\beta \mathbb{E}_t dv_{m,t+1} - d \ln \kappa_{mit}) \end{array} \right]. \quad (\text{B.28})$$

B.4.2 稳态充分统计量

假设经济从初始稳态开始，内生变量为常数： $k_{it+1} = k_{it} = k_i^*$ 、 $\ell_{it+1} = \ell_{it} = \ell_i^*$ 、 $w_{it+1}^* = w_{it}^* = w_i^*$ 以及 $v_{it+1}^* = v_{it}^* = v_i^*$ ，其中本文用上星标表示变量的稳态值，并将时间下标 t 去掉。考虑各个地区生产率 ($d \ln z$) 与舒适度 ($d \ln b$) 的轻微冲击，并且假定经济加总的劳动力禀赋 ($d \ln \bar{\ell} = 0$)、贸易成本 ($d \ln \tau = 0$) 以及迁移成本 ($d \ln \kappa = 0$) 为常数。

(1) 资本积累。从资本积累方程式 (11) 可解得稳态资本存量为：

$$(1 - \beta(1 - \delta)) \chi_i^* = (1 - \beta(1 - \delta)) \frac{k_i^*}{\ell_i^*} = \beta \frac{1 - \mu}{\mu} \frac{w_i^*}{p_i^*}.$$

对其进行全微分，可得：

$$d \ln \chi_i^* = d \ln \left(\frac{w_i^*}{p_i^*} \right).$$

基于公式 (B.24) 真实收入的全微分，上式也改写为：

$$d \ln \chi_i^* = d \ln w_i^* - \sum_{m=1}^N S_{im}^* \left[d \ln w_m^* - (1 - \mu) d \ln \chi_m^* - d \ln z_m \right],$$

其中，由于 $d \ln \tau_{nm} = 0$ ，这一关系用矩阵形式可表示为：

$$(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S}) d \ln \boldsymbol{\chi}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{S}) d \ln \mathbf{w}^* + \mathbf{S} d \ln \mathbf{z}. \quad (\text{B.29})$$

(2) 产品市场出清。公式 (B.26) 产品市场出清的全微分条件可用矩阵表示为：

$$d \ln \mathbf{w}_t + d \ln \boldsymbol{\ell}_t = \mathbf{T} (d \ln \mathbf{w}_t + d \ln \boldsymbol{\ell}_t) + \theta (\mathbf{TS} - \mathbf{I}) (d \ln \mathbf{w}_t - (1 - \mu) d \ln \boldsymbol{\chi}_t - d \ln \mathbf{z}),$$

其中，由于 $d \ln \tau = 0$ ，因此可将此关系进一步改写为：

$$[\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta (\mathbf{I} - \mathbf{TS})] d \ln \mathbf{w}_t = -(\mathbf{I} - \mathbf{T}) d \ln \boldsymbol{\ell}_t + \theta (\mathbf{I} - \mathbf{TS}) (d \ln \mathbf{z} + (1 - \mu) d \ln \boldsymbol{\chi}_t).$$

在稳态有：

$$[\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta (\mathbf{I} - \mathbf{TS})] d \ln \mathbf{w}^* = [-(\mathbf{I} - \mathbf{T}) d \ln \boldsymbol{\ell}^* + \theta (\mathbf{I} - \mathbf{TS}) (d \ln \mathbf{z} + (1 - \mu) d \ln \boldsymbol{\chi}^*)]. \quad (\text{B.30})$$

(3) 人口流动。公式 (B.27) 人口流动条件的全微分可用矩阵表示为：

$$d \ln \boldsymbol{\ell}_{t+1} = \mathbf{E} d \ln \boldsymbol{\ell}_t + \frac{\beta}{\rho} (\mathbf{I} - \mathbf{ED}) dv_{t+1}.$$

在稳态有：

$$d \ln \ell^* = E d \ln \ell^* + \frac{\beta}{\rho} (I - ED) dv^*. \quad (\text{B.31})$$

(4) 价值方程。公式 (B.28) 价值方程的全微分可用矩阵表示为：

$$dv_t = (I - S) d \ln w_t + S(d \ln z + (1 - \mu) d \ln \chi_t) + d \ln b + \beta D dv_{t+1},$$

其中，由于 $d \ln \tau = d \ln \kappa = 0$ ，稳态时有：

$$dv^* = (I - S) d \ln w^* + S(d \ln z + (1 - \mu) d \ln \chi^*) + d \ln b + \beta D dv^*. \quad (\text{B.32})$$

(5) 稳态方程组。由以上分析整理可得稳态方程组为：

$$d \ln \chi^* = (I - (1 - \mu)S)^{-1} ((I - S) d \ln w^* + S d \ln z). \quad (\text{B.33})$$

$$d \ln w^* = (I - T + \theta(I - TS))^{-1} (-(I - T) d \ln \ell^* + (I - TS) \theta (d \ln z + (1 - \mu) d \ln \chi^*)). \quad (\text{B.34})$$

$$d \ln \ell^* = \frac{\beta}{\rho} (I - E)^{-1} (I - ED) dv^*. \quad (\text{B.35})$$

$$dv^* = (I - \beta D)^{-1} \{ d \ln w^* - S(d \ln w^* - d \ln z - (1 - \mu) d \ln \chi^* + d \ln b) \}. \quad (\text{B.36})$$

B.4.3 稳态弹性

现在，用公式 (B.33) 中 $d \ln \chi^*$ 的表达式代入公式 (B.36) 价值方程中，可得：

$$\begin{aligned} dv^* &= (I - \beta D)^{-1} \{ d \ln w^* - S(d \ln w^* - d \ln z - (1 - \mu) d \ln \chi^*) + d \ln b \}, \\ &= (I - \beta D)^{-1} \{ (I - S) d \ln w^* + S d \ln z + S(1 - \mu) d \ln \chi^* + d \ln b \}, \\ &= (I - \beta D)^{-1} (I + S(1 - \mu)(I - (1 - \mu)S)^{-1}) [(I - S) d \ln w^* + S d \ln z + d \ln b], \\ &= (I - \beta D)^{-1} [d \ln b + (I - (1 - \mu)S)^{-1} ((I - S) d \ln w^* + S d \ln z)]. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

接着再用公式 (B.33) 中 $d \ln \chi^*$ 的表达式代入公式 (B.34) 工资方程中，可得：

$$(I - T + \theta(I - TS)) d \ln w^* = -(I - T) d \ln \ell^* + (I - TS) \theta (d \ln z + (1 - \mu) d \ln \chi^*),$$

$$(I - T + \theta(I - TS)) d \ln w^* = \begin{bmatrix} -(I - T) d \ln \ell^* + (I - TS) \theta d \ln z \\ + (I - TS) \theta (1 - \mu) (I - (1 - \mu)S)^{-1} ((I - S) d \ln w^* + S d \ln z) \end{bmatrix},$$

$$(I - T + \theta(I - TS)) d \ln w^* = \begin{bmatrix} -(I - T) d \ln \ell^* + (I - TS) \theta (I + (I - (1 - \mu)S)^{-1} (1 - \mu)S) d \ln z \\ + (I - TS) \theta (1 - \mu) (I - (1 - \mu)S)^{-1} (I - S) d \ln w^* \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} (I - T + \theta(I - TS)) d \ln w^* &= -(I - T) d \ln \ell^* + (I - TS) \theta (d \ln z + (1 - \mu) d \chi^*), \\ &= -(I - T) d \ln \ell^* + (I - TS) \theta d \ln z \\ &\quad + (I - TS) \theta (1 - \mu) (I - (1 - \mu)S)^{-1} ((I - S) d \ln w^* + S d \ln z), \\ &= -(I - T) d \ln \ell^* + (I - TS) \theta (I + (I - (1 - \mu)S)^{-1} (1 - \mu)S) d \ln z \\ &\quad + (I - TS) \theta (1 - \mu) (I - (1 - \mu)S)^{-1} (I - S) d \ln w^*. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS}) \left(\mathbf{I} - (1 - \mu)(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \right) \right) d \ln \mathbf{w}^* \\
 & \quad = -(\mathbf{I} - \mathbf{T}) d \ln \ell^* + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} d \ln z, \\
 & \left(\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS}) \left((\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} - (1 - \mu)(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} \right) \right) d \ln \mathbf{w}^* \\
 & \quad = -(\mathbf{I} - \mathbf{T}) d \ln \ell^* + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} d \ln z, \\
 & \left(\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})\mu(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} \right) d \ln \mathbf{w}^* \\
 & \quad = -(\mathbf{I} - \mathbf{T}) d \ln \ell^* + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} d \ln z.
 \end{aligned} \tag{B.38}$$

基于资本积累方程式 (B.33)、人口流动方程式 (B.35)、价值方程式 (B.37) 以及工资方程式 (B.38), 可得:

$$d\mathbf{v}^* = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{D})^{-1} \left[d \ln \mathbf{b} + (\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} ((\mathbf{I} - \mathbf{S}) d \ln \mathbf{w}^* + \mathbf{S} d \ln z) \right], \tag{B.39}$$

$$d \ln \mathbf{w}^* = \left[\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})\mu(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} -(\mathbf{I} - \mathbf{T}) d \ln \ell^* \\ +\theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} d \ln z \end{array} \right], \tag{B.40}$$

$$d \ln \chi^* = (\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} \left[(\mathbf{I} - \mathbf{S}) d \ln \mathbf{w}^* + \mathbf{S} d \ln z \right], \tag{B.41}$$

$$d \ln \ell^* = \frac{\beta}{\rho} (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{ED}) d\mathbf{v}^*. \tag{B.42}$$

接下来, 本文将进一步简化方程, 首先定义如下复合矩阵:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} & \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{ED}) (\mathbf{I} - \beta\mathbf{D})^{-1}, \\
 \mathbf{O} & \equiv (\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1}, \\
 \mathbf{M} & \equiv (\mathbf{TS} - \mathbf{I}).
 \end{aligned} \tag{B.43}$$

并且这些矩阵还具有以下性质:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} + (1 - \mu)\mathbf{SO} & = \mathbf{O}, \\
 \mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{O}(\mathbf{I} - \mathbf{S}) & = \mathbf{I} + (1 - \mu)\mathbf{OS} - (1 - \mu)\mathbf{O} = \mu\mathbf{O}.
 \end{aligned}$$

基于以上定义与性质, 可将公式 (B.40) 改写为:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta\mathbf{M}) d \ln \mathbf{w}^* = -(\mathbf{I} - \mathbf{T}) d \ln \ell^* - \theta\mathbf{M} \left[d \ln z + (1 - \mu)\mathbf{O}(\mathbf{I} - \mathbf{S}) d \ln \mathbf{w}^* + (1 - \mu)\mathbf{OS} d \ln z \right],$$

$$\left[\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta\mathbf{M}(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{O}(\mathbf{I} - \mathbf{S})) \right] d \ln \mathbf{w}^* = -(\mathbf{I} - \mathbf{T}) d \ln \ell^* - \theta\mathbf{MO} d \ln z,$$

$$d \ln \mathbf{w}^* = \left[\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})\mu(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} -(\mathbf{I} - \mathbf{T}) d \ln \ell^* \\ +\theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})(\mathbf{I} - (1 - \mu)\mathbf{S})^{-1} d \ln z \end{array} \right],$$

$$d \ln \mathbf{w}^* = \left[\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta\mu\mathbf{MO} \right]^{-1} \left[-(\mathbf{I} - \mathbf{T}) d \ln \ell^* - \theta\mathbf{MO} d \ln z \right]. \tag{B.44}$$

基于价值方程式 (B.39), 可将公式 (B.42) 劳动力方程改写为:

$$d \ln \ell^* = \frac{\beta}{\rho} (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{ED}) (\mathbf{I} - \beta \mathbf{D})^{-1} \left[d \ln \mathbf{b} + (\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mu) \mathbf{S})^{-1} [(\mathbf{I} - \mathbf{S}) d \ln \mathbf{w}^* + \mathbf{S} d \ln \mathbf{z}] \right].$$

基于资本积累公式 (B.41) 以及定义式 (B.43), 可进一步将上式改写为:

$$d \ln \ell^* = \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} [d \ln \boldsymbol{\chi}^* + d \ln \mathbf{b}]. \quad (\text{B.45})$$

基于定义式 (B.43), 可将资本积累方程式 (B.41) 改写为:

$$\begin{aligned} d \ln \boldsymbol{\chi}^* &= \mathbf{O} \left[(\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} \left(-(\mathbf{I} - \mathbf{T}) \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} [d \ln \boldsymbol{\chi}^* + d \ln \mathbf{b}] - \theta \mathbf{M} \mathbf{O} d \ln \mathbf{z} \right) + \mathbf{S} d \ln \mathbf{z} \right], \\ & \left[\mathbf{I} + \mathbf{O} (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} \right] d \ln \boldsymbol{\chi}^* \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{OS} - \theta \mathbf{O} (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} \mathbf{M} \mathbf{O}] d \ln \mathbf{z} \\ -\mathbf{O} (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} d \ln \mathbf{b} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

据此, 本文获得了每个地区内生变量对于任何地区冲击的稳态弹性的表达式。

命题 A.1: 经济活动稳态分布 $\{w_i^*, v_i^*, \ell_i^*, k_i^*\}$ 对生产率 ($d \ln z$) 与舒适度 ($d \ln b$) 轻微冲击的一般均衡响应, 仅由矩阵 $\{L^*, K^{z*}, W^{z*}, V^{z*}, L^{b*}, K^{b*}, W^{b*}, V^{b*}\}$ 决定。而这些矩阵则完全取决于结构参数 $\{\theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ 以及可观测到的支出份额矩阵 \mathbf{S} 、收入份额矩阵 \mathbf{T} 、迁出份额矩阵 \mathbf{D} 以及迁入份额矩阵 \mathbf{E} :

$$\begin{bmatrix} d \ln \ell^* \\ d \ln k^* \\ d \ln w^* \\ d \ln v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^* \\ K^{z*} \\ W^{z*} \\ V^{z*} \end{bmatrix} d \ln z + \begin{bmatrix} L^{b*} \\ K^{b*} \\ W^{b*} \\ V^{b*} \end{bmatrix} d \ln b, \quad (\text{B.47})$$

证明如下:

首先, 基于以上整理的公式: 价值方程 (B.39)、工资方程 (B.44)、人口方程 (B.45)、资本-劳动方程 (B.46), 尤其是后两者, 综合可得:

$$\begin{aligned} L^* &\equiv \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} \left[\mathbf{I} + \mathbf{O} (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} \right]^{-1} \\ & \quad \times (\mathbf{OS} - \theta \mathbf{O} (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} \mathbf{M} \mathbf{O}), \\ L^{b*} &\equiv \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} - \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} \left[\mathbf{I} + \mathbf{O} (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} \right]^{-1} \\ & \quad \times \mathbf{O} (\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G}. \end{aligned}$$

基于资本-劳动方程 (B.46) 与人口方程 (B.45) 可得:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{z*} &\equiv \left[\mathbf{I} + \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} \right] \left[\mathbf{I} + \mathbf{O}(\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} \right]^{-1} \\
&\quad \times (\mathbf{O} \mathbf{S} - \theta \mathbf{O}(\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} \mathbf{M} \mathbf{O}), \\
\mathbf{K}^{b*} &\equiv \mathbf{L}^{b*} - \left[\mathbf{I} + \mathbf{O}(\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G} \right]^{-1} \\
&\quad \times \mathbf{O}(\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{T}) \frac{\beta}{\rho} \mathbf{G}.
\end{aligned}$$

基于工资方程 (B.44) 与人口方程 (B.45) 可得:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{z*} &\equiv [\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O}]^{-1} [-(\mathbf{I} - \mathbf{T}) \mathbf{L}^{z*} - \theta \mathbf{M} \mathbf{O}], \\
\mathbf{W}^{b*} &\equiv [\mathbf{I} - \mathbf{T} - \theta \mathbf{M} \mu \mathbf{O}]^{-1} [-(\mathbf{I} - \mathbf{T}) \mathbf{L}^{b*}].
\end{aligned}$$

基于价值方程 (B.39) 与工资方程 (B.44) 可得:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{z*} &\equiv (\mathbf{I} - \beta \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{I} - (1 - \mu) \mathbf{S})^{-1} [(\mathbf{I} - \mathbf{S}) \mathbf{W}^{z*} + \mathbf{S}], \\
\mathbf{V}^{b*} &\equiv (\mathbf{I} - \beta \mathbf{D})^{-1} + (\mathbf{I} - \beta \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{I} - (1 - \mu) \mathbf{S})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \mathbf{W}^{b*}.
\end{aligned}$$

观察可知, 稳态弹性矩阵 $\{\mathbf{L}^{z*}, \mathbf{K}^{z*}, \mathbf{W}^{z*}, \mathbf{V}^{z*}, \mathbf{L}^{b*}, \mathbf{K}^{b*}, \mathbf{W}^{b*}, \mathbf{V}^{b*}\}$ 是结构参数 $\{\theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ 与可观测的支出份额矩阵 \mathbf{S} 、收入份额矩阵 \mathbf{T} 、迁出份额矩阵 \mathbf{D} 以及迁入份额矩阵 \mathbf{E} 的线性组合。因此, 内生变量 $\{w_i^*, v_i^*, \ell_i^*, k_i^*\}$ 对生产率与舒适度冲击的稳态变化响应是唯一的。

考虑到支出份额矩阵 \mathbf{S} 与收入份额矩阵 \mathbf{T} 在要素价格上为零度同质的 (Homogeneous of degree zero), 为了求解工资的变化, 需要一些数值设定 (numeraire)。因此, 本文假定所有地区的总劳动收入为 1, 也即: $\sum_{i=1}^N w_i^* \ell_i^* = \sum_{i=1}^N q_i^* = \bar{q} = 1$ 。再假定 \mathbf{q}^* 为稳态下各个地区劳动收入的行向量, 则有: $\mathbf{q}^* d \ln \mathbf{q}^* = \sum_{i=1}^N q_i^* d \ln q_i^* = \sum_{i=1}^N q_i^* \frac{dq_i^*}{q_i^*} = \sum_{i=1}^N dq_i^* = 0$ 。同样的, 由于迁出份额矩阵 \mathbf{D} 、迁入份额矩阵 \mathbf{E} 在所有地区的总人口上也是零度同质的, 因此也需要作这样的假设, 也即: $\sum_{i=1}^N \ell_i = \bar{\ell} = 1$ 。再假定 $\boldsymbol{\ell}^*$ 为稳态下各个地区人口的行向量, 则同样有以下关系: $\sum_{i=1}^N \ell_i^* d \ln \ell_i^* = 0$ 成立。

B.4.4 线性均衡条件推导

假设在 $t=0$ 时, 观测到状态变量的初始值 $(\boldsymbol{\ell}_0, \mathbf{k}_0)$ 以及贸易与迁移矩阵 $(\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{E})$, 此时并不需要与模型稳态相关。在下文中, 本文将使用波浪上标表示变量与初始稳态值的对数偏差, 例如 $\tilde{\chi}_{i+1} = \ln \chi_{i+1} - \ln \chi_i^*$, 对于除劳动者价值方程 v_{it} 以外的变量均适用。而对于劳动者价值方程, 本文则令 $\tilde{v}_{it} \equiv v_{it} - v_i^*$, 在有些滥用符号的基础上将其波浪上标表示为其与稳态值的水平偏差。本文考虑了所有地区的生产率 ($d \ln z_t$) 与舒适度 ($d \ln b_t$) 的随机

冲击 (Stochastic Shocks), 并且保持经济的劳动禀赋加总 ($d \ln \bar{\ell} = 0$)、区际贸易成本 ($d \ln \tau_i = 0$) 与迁移成本 ($d \ln \kappa_i = 0$) 不变。

(1) 人口流动 (公式 (20))。人口流动条件 (B.27) 相对于初始稳态的全微分可用以下矩阵表示:

$$\tilde{\ell}_{t+1} = \mathbf{E} \tilde{\ell}_t + \frac{\beta}{\rho} (\mathbf{I} - \mathbf{E} \mathbf{D}) \mathbb{E}_t \tilde{\mathbf{v}}_{t+1}. \quad (\text{B.48})$$

(2) 资本积累 (公式 (18))。注意到在确定性稳态 (Deterministic Steady-state) 时, 有: $\beta R^* = 1$, 且 $\zeta^{*-1} = 1 + \beta^\psi (R^*)^{\psi-1} \zeta^{*-1}$, 从而有 $\zeta^* = 1 - \beta$ 。现在相对于确定性稳态对公式 (B.4) 进行线性化, 令 $\tilde{x}_t \equiv \ln x_t - \ln x^*$, 则有:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_t &\approx -\mathbb{E}_t \ln \frac{1 + \beta^\psi (R^*)^{\psi-1} (R_{t+1} / R^*)^{\psi-1} \zeta_{t+1}^{-1}}{1 + \beta \zeta_{t+1}^{-1}}, \\ &= -\mathbb{E}_t \ln \frac{1 + \frac{\beta}{1-\beta} (R_{t+1} / R^*)^{\psi-1} (\zeta_{t+1} / \zeta^*)^{-1}}{1 + \beta / (1-\beta)}, \\ &\approx -\mathbb{E}_t \ln \left(1 + \beta \left((R_{t+1} / R^*)^{\psi-1} - 1 \right) + \beta \left((\zeta_{t+1} / \zeta^*)^{-1} - 1 \right) \right), \\ &= \beta \mathbb{E}_t \tilde{\zeta}_{t+1} - (\psi - 1) \beta \mathbb{E}_t \tilde{R}_{t+1}. \\ \tilde{c}_t &= \tilde{k}_t + \tilde{R}_t + \tilde{\zeta}_t = \tilde{k}_t + \tilde{R}_t - (\psi - 1) \mathbb{E}_t \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s \tilde{R}_{t+s}. \\ \tilde{k}_{t+1} &= \tilde{k}_t + \tilde{R}_t + (1 - \tilde{\zeta}_t) = \tilde{k}_t + \tilde{R}_t - \frac{1-\beta}{\beta} \tilde{\zeta}_t, \\ &= \tilde{k}_t + \tilde{R}_t + \frac{1-\beta}{\beta} (\psi - 1) \mathbb{E}_t \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s \tilde{R}_{t+s}. \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

下面推导 \tilde{R}_{t+s} 的表达式。首先, 注意到 $R_{it} = 1 - \delta + r_{it} / p_{it}$, 并且在稳态时存在条件 $\beta(1 - \delta + r^* / p^*) = 1$, 因此有:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{it} &= \ln \left(\frac{1 - \delta + r_{it} / p_{it}}{1 - \delta + r^* / p^*} \right), \\ &= \ln(\beta(1 - \delta + r_{it} / r^* - 1 + 1)(p^{*-1}(p^* / p_{it} - 1 + 1))), \\ &\approx \ln(1 + \beta r^* / p^* ((r_{it} / r^* - 1) + (p^{*-1}(p^* / p_{it} - 1)))) = \beta r^* / p^* (\tilde{r}_{it} - \tilde{p}_{it}), \\ &= (1 - \beta(1 - \delta))(\tilde{r}_{it} - \tilde{p}_{it}) = (1 - \beta(1 - \delta))(\tilde{w}_{it} - \tilde{p}_{it} - \tilde{\chi}_{it}). \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

其中, 由于 $\chi_{it} \equiv k_{it} / \ell_{it}$ 且 $r_{it} = \frac{1-\mu}{\mu} w_{it} \ell_{it} / k_{it}$, 则公式 (B.49-50) 可推出:

$$\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t + (1 - \beta(1 - \delta)) \left[(\tilde{w}_t - \tilde{p}_t - \tilde{\chi}_t) + \frac{1-\beta}{\beta} (\psi - 1) \mathbb{E}_t \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s (\tilde{w}_{t+s} - \tilde{p}_{t+s} - \tilde{\chi}_{t+s}) \right]. \quad (\text{B.51})$$

(3) 价值方程 (公式 (21))。相对于稳态的价值方程的全微分可表示为:

$$\tilde{\mathbf{v}}_t = \tilde{\mathbf{w}}_t - \tilde{\mathbf{p}}_t + \tilde{\mathbf{b}}_t + \beta \mathbf{D} \mathbb{E}_t \tilde{\mathbf{v}}_{t+1}. \quad (\text{B.52})$$

(4) 产品市场出清 (公式 (19))。相对于稳态的产品出清条件 (B.26) 的全微分可由以下矩阵表示:

$$\tilde{w}_t + \tilde{\ell}_t = T(\tilde{w}_t + \tilde{\ell}_t) + \theta(TS - I)(\tilde{w}_t - (1 - \mu)\tilde{\chi}_t - \tilde{z}_t),$$

由于 $d \ln \tau = 0$ ，因此可将上式进一步改写为：

$$[I - T + \theta(I - TS)]\tilde{w}_t = [-(I - T)\tilde{\ell}_t + \theta(I - TS)(\tilde{z}_t + (1 - \mu)\tilde{\chi}_t)]. \quad (\text{B.53})$$

(5) 价格指数（公式（17））。将公式（B.22）代入公式（B.23）中，并将其堆叠成矩阵形式，则可得公式（17）：

$$\tilde{p}_t = S(\tilde{w}_t - \tilde{z}_t - (1 - \mu)(\tilde{k}_t - \tilde{\ell}_t)). \quad (\text{B.54})$$

(6) 相对于初始稳态的动态转移方程组。综合资本动态方程（B.51）、产品市场出清条件（B.53）、人口流动条件（B.48）、价值方程（B.52）以及价格指数方程（B.54），可得相对于初始稳态的动态转移方程为：

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{t+1} = & \tilde{k}_t + (1 - \beta(1 - \delta))(\tilde{w}_t - \tilde{p}_t - \tilde{k}_t + \tilde{\ell}_t) \\ & + (1 - \beta(1 - \delta))\frac{1 - \beta}{\beta}(\psi - 1)\mathbb{E}_t \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s (\tilde{w}_{t+s} - \tilde{p}_{t+s} - \tilde{k}_{t+s} + \tilde{\ell}_{t+s}). \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

$$\tilde{w}_t = [I - T + \theta(I - TS)]^{-1} [-(I - T)\tilde{\ell}_t + \theta(I - TS)(\tilde{z}_t + (1 - \mu)\tilde{\chi}_t)]. \quad (\text{B.56})$$

$$\tilde{\ell}_{t+1} = E\tilde{\ell}_t + \frac{\beta}{\rho}(I - ED)\mathbb{E}_t \tilde{v}_{t+1}. \quad (\text{B.57})$$

$$\tilde{v}_t = (I - S)\tilde{w}_t + S\tilde{z}_t + (1 - \mu)S\tilde{\chi}_t + \tilde{b}_t + \beta D\mathbb{E}_t \tilde{v}_{t+1}. \quad (\text{B.58})$$

$$\tilde{p}_t = S(\tilde{w}_t - \tilde{z}_t - (1 - \mu)(\tilde{k}_t - \tilde{\ell}_t)). \quad (\text{B.59})$$

B.4.5 稳态均衡条件

接下来，本文将重新整理均衡条件（B.55-59），并求解内生状态变量（ ℓ_t 与 k_t ）的运动规律。为了表示的方便，本文将状态变量改为劳动与资本-劳动比（ ℓ_t 与 χ_t ），但注意到资本运动规律可以被恢复为 $k_{it} = \ell_{it}\chi_{it}$ 。将工资方程（B.56）的 $d \ln \tilde{w}_t$ 代入价值方程（B.58）中，可得：

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t = & \begin{bmatrix} (I - S)[I - T + \theta(I - TS)]^{-1} \begin{bmatrix} -(I - T)\tilde{\ell}_t \\ +\theta(I - TS)(\tilde{z}_t + (1 - \mu)\tilde{\chi}_t) \end{bmatrix} \\ +S\tilde{z}_t + (1 - \mu)S\tilde{\chi}_t + \tilde{b}_t + \beta D\mathbb{E}_t \tilde{v}_{t+1} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.60}) \\ \tilde{v}_t = & \begin{bmatrix} -(I - S)[I - T + \theta(I - TS)]^{-1}(I - T)\tilde{\ell}_t \\ +(1 - \mu)[S + \theta(I - S)[I - T + \theta(I - TS)]^{-1}(I - TS)]\tilde{\chi}_t \\ +[S + \theta(I - S)[I - T + \theta(I - TS)]^{-1}(I - TS)]\tilde{z}_t \\ +\tilde{b}_t + \beta D\mathbb{E}_t \tilde{v}_{t+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

上式可以更紧凑地改写为：

$$\tilde{\mathbf{v}}_t = \mathbf{A}\tilde{\ell}_t + \mathbf{B}\tilde{\chi}_t + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{z}}_t + \tilde{\mathbf{b}}_t + \beta\mathbf{D}\mathbb{E}_t\tilde{\mathbf{v}}_{t+1}, \quad (\text{B.61})$$

其中, \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 分别定义为:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv -(\mathbf{I} - \mathbf{S})[\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{T}), \\ \mathbf{B} &\equiv (1 - \mu)\left\{\mathbf{S} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{S})[\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{TS})\right\}, \\ \mathbf{C} &\equiv \mathbf{S} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{S})[\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{TS}). \end{aligned}$$

将迭代方程 (B.61) 时期向前 (Forward in Time) 推导, 可得:

$$\tilde{\mathbf{v}}_t = \mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\mathbf{D})^s \left(\mathbf{A}\tilde{\ell}_{t+s} + \mathbf{B}\tilde{\chi}_{t+s} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{z}}_{t+s} + \tilde{\mathbf{b}}_{t+s} \right). \quad (\text{B.62})$$

将公式 (B.62) 中的 $\tilde{\mathbf{v}}_{t+1}$ (向后一期) 代入公式 (B.57) 中, 可得以下人口与稳态值 ($\tilde{\ell}_t$) 对数偏差的自回归表示:

$$\tilde{\ell}_{t+1} - \mathbf{E}\tilde{\ell}_t = \left[\frac{\beta}{\rho}(\mathbf{I} - \mathbf{ED})\mathbb{E}_t \sum_{s=0}^{\infty} (\beta\mathbf{D})^s \left(\mathbf{A}\tilde{\ell}_{t+s+1} + \mathbf{B}\tilde{\chi}_{t+s+1} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{z}}_{t+s+1} + \tilde{\mathbf{b}}_{t+s+1} \right) \right]. \quad (\text{B.63})$$

类似的, 资本动态方程 (B.55) 可改写为 (注意到 $\tilde{\mathbf{w}}_t - \tilde{\mathbf{p}}_t = \mathbf{A}\tilde{\ell}_t + \mathbf{B}\tilde{\chi}_t + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{z}}_t$):

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{t+1} + \tilde{\ell}_{t+1} &= \tilde{\chi}_t + \tilde{\ell}_t + (1 - \beta(1 - \delta)) \left(\mathbf{A}\tilde{\ell}_t + (\mathbf{B} - \mathbf{I})\tilde{\chi}_t + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{z}}_t \right) \\ &+ (1 - \beta(1 - \delta)) \frac{1 - \beta}{\beta} (\psi - 1) \mathbb{E}_t \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s \left(\mathbf{A}\tilde{\ell}_{t+s} + (\mathbf{B} - \mathbf{I})\tilde{\chi}_{t+s} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{z}}_{t+s} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

B.4.6 命题 3 推导过程

假设代理人在 $t=0$ 时期了解到从 $t=1$ 开始的生产率与舒适度的一次性、意料之外的、持久性冲击。在这个假设下, 可以将基本面 (生产率与舒适度) 相对于初始水平的未来序列写成 $(\tilde{\mathbf{z}}_t, \tilde{\mathbf{b}}_t) = (\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{b}})$ for $t \geq 1$ 。

回顾命题 3: 存在 $2N \times 2N$ 的转移矩阵 \mathbf{P} 和 $2N \times 2N$ 的冲击矩阵 \mathbf{R} , 使得公式 (22) 中的二阶差分方程组可以解出如下形式的闭式解:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}_t + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}_t, \quad \text{for } t \geq 0. \quad (\text{B.65})$$

其中, $\tilde{\mathbf{x}}_t = \begin{bmatrix} \tilde{\ell}_t \\ \tilde{\mathbf{k}}_t \end{bmatrix}$ 为 $2N \times 2N$ 的状态变量的一个向量; $\tilde{\mathbf{f}}_t = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_t \\ \tilde{\mathbf{b}}_t \end{bmatrix}$ 为 $2N \times 2N$ 的基本面冲击的一个向量; 而 $\{\mathbf{P}, \mathbf{R}\}$ 也是 $2N \times 2N$ 的矩阵, 并且其仅依赖于结构参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$

与可观测的贸易与迁移矩阵 $\{\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{E}\}$ 。

证明如下:

如前所述, 令 $\tilde{\chi}_t \equiv \tilde{\mathbf{k}}_t - \tilde{\ell}_t$, 其中 $\tilde{\chi}_t$ 为各个地区的资本-劳动比向量。由于代理人对未来 $t \geq 1$ 时期基本面的期望为常数, 因此可以将公式 (B.63-64) 中的期望符号去掉, 并且将基

本面未来序列写成 $(\tilde{z}_t, \tilde{b}_t) = (\tilde{z}, \tilde{b})$:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{ED})^{-1}(\tilde{\ell}_{t+1} - \mathbf{E}\tilde{\ell}_t) = \frac{\beta}{\rho} \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \mathbf{D})^s (\mathbf{A}\tilde{\ell}_{t+s+1} + \mathbf{B}\tilde{\chi}_{t+s+1} + \mathbf{C}\tilde{z} + \tilde{b}). \quad (\text{B.66})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{t+1} + \tilde{\ell}_{t+1} &= \tilde{\chi}_t + \tilde{\ell}_t + (1 - \beta(1 - \delta))(\mathbf{A}\tilde{\ell}_t + (\mathbf{B} - \mathbf{I})\tilde{\chi}_t + \mathbf{C}\tilde{z}) \\ &+ (1 - \beta(1 - \delta)) \frac{1 - \beta}{\beta} (\psi - 1) \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s (\mathbf{A}\tilde{\ell}_{t+s} + (\mathbf{B} - \mathbf{I})\tilde{\chi}_{t+s} + \mathbf{C}\tilde{z}). \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

类似的有:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{ED})^{-1}(\tilde{\ell}_{t+2} - \mathbf{E}\tilde{\ell}_{t+1}) = \frac{\beta}{\rho} \sum_{s=0}^{\infty} (\beta \mathbf{D})^s (\mathbf{A}\tilde{\ell}_{t+s+2} + \mathbf{B}\tilde{\chi}_{t+s+2} + \mathbf{C}\tilde{z} + \tilde{b}). \quad (\text{B.68})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{t+2} + \tilde{\ell}_{t+2} &= \tilde{\chi}_{t+1} + \tilde{\ell}_{t+1} + (1 - \beta(1 - \delta))(\mathbf{A}\tilde{\ell}_{t+1} + (\mathbf{B} - \mathbf{I})\tilde{\chi}_{t+1} + \mathbf{C}\tilde{z}) \\ &+ (1 - \beta(1 - \delta)) \frac{1 - \beta}{\beta} (\psi - 1) \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s (\mathbf{A}\tilde{\ell}_{t+s+1} + (\mathbf{B} - \mathbf{I})\tilde{\chi}_{t+s+1} + \mathbf{C}\tilde{z}). \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

将公式 (B.68) 两边同乘以 $\beta \mathbf{D}$, 并减去公式 (B.66), 重新排列可得:

$$\beta \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{ED})^{-1} \tilde{\ell}_{t+2} = \begin{bmatrix} \left[\beta \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{ED})^{-1} \mathbf{E} + (\mathbf{I} - \mathbf{ED})^{-1} - \frac{\beta}{\rho} \mathbf{A} \right] \tilde{\ell}_{t+1} \\ -(\mathbf{I} - \mathbf{ED})^{-1} \mathbf{E} \tilde{\ell}_t \\ -\frac{\beta}{\rho} \mathbf{B} \tilde{\chi}_{t+1} - \frac{\beta}{\rho} \mathbf{C} \tilde{z} - \frac{\beta}{\rho} \tilde{b} \end{bmatrix}.$$

同样的, 将公式 (B.69) 两边同乘以 β , 并减去公式 (B.67) 可得:

$$\begin{aligned} \beta(\tilde{\chi}_{t+2} + \tilde{\ell}_{t+2}) &= (-\mathbf{I} - (1 - \beta(1 - \delta))\mathbf{A})\tilde{\ell}_t + (-\mathbf{I} - (1 - \beta(1 - \delta))(\mathbf{B} - \mathbf{I}))\tilde{\chi}_t \\ &+ ((1 + \beta)\mathbf{I} - (1 - \beta(1 - \delta))(\psi - 1 - \beta\psi)(\mathbf{B} - \mathbf{I}))\tilde{\chi}_{t+1} \\ &+ ((1 + \beta)\mathbf{I} - (1 - \beta(1 - \delta))(\psi - 1 - \beta\psi)\mathbf{A})\tilde{\ell}_{t+1} \\ &- (1 - \beta(1 - \delta))\psi(1 - \beta)\mathbf{C}\tilde{z}. \end{aligned}$$

将这两个二阶差分方程进行堆叠 (Stacking), 可得:

$$\begin{bmatrix} \beta \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{ED})^{-1} & \mathbf{0} \\ \beta \mathbf{I} & \beta \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\ell}_{t+2} \\ \tilde{\chi}_{t+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\ell}_{t+1} \\ \tilde{\chi}_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \mathbf{0} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\ell}_t \\ \tilde{\chi}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\rho} \mathbf{C} & -\frac{\beta}{\rho} \mathbf{I} \\ -\mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.70})$$

$$\mathbf{Y}_{11} \equiv \beta \mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{ED})^{-1} \mathbf{E} + (\mathbf{I} - \mathbf{ED})^{-1} - \frac{\beta}{\rho} \mathbf{A}, \quad \mathbf{Y}_{12} \equiv -\frac{\beta}{\rho} \mathbf{B},$$

$$\mathbf{Y}_{21} \equiv \left[(1 + \beta)\mathbf{I} + (1 - \beta(1 - \delta))(\psi - 1 - \beta\psi)(\mathbf{I} - \mathbf{S})[\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{T}) \right],$$

$$\mathbf{Y}_{22} \equiv \left[\begin{array}{c} (1 + \beta)\mathbf{I} - \{(1 - \beta(1 - \delta))(\psi - 1 - \beta\psi) \times \\ [(1 - \mu)\{\mathbf{S} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{S})[\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS})]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{TS})\} - \mathbf{I} \} \end{array} \right],$$

$$\Theta_{11} \equiv -(\mathbf{I} - \mathbf{ED})^{-1} \mathbf{E}, \quad \Theta_{21} \equiv -\mathbf{I} + (1 - \beta(1 - \delta))(\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS}))^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{T}).$$

$$\Theta_{22} \equiv -\mathbf{I} - (1 - \beta(1 - \delta)) \left\{ (1 - \mu) \left\{ \mathbf{S} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{S})(\mathbf{I} - \mathbf{T} + \theta(\mathbf{I} - \mathbf{TS}))^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{TS}) \right\} - \mathbf{I} \right\}.$$

$$\mathbf{H} \equiv \psi(1-\beta)(1-\beta(1-\delta)) \left[\theta(\mathbf{I}-\mathbf{S})[\mathbf{I}-\mathbf{T}+\theta(\mathbf{I}-\mathbf{TS})]^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{TS})+\mathbf{S} \right].$$

接下来，本文首先猜想存在一个线性闭式解 (B.65)，并将其代入二阶差分方程组 (B.70) 中，从而得到一个二次矩阵方程组 (Matrix System of Quadratic Equations)。然后，对这个二次矩阵方程组进行求解，并证实了猜想公式 (B.65) 是成立的。

将猜想公式 (B.65) 代入二阶差分方程组 (B.70) 中，可得：

$$(\Psi\mathbf{P}^2 - \Gamma\mathbf{P} - \Theta) \begin{bmatrix} \tilde{\ell}_t \\ \tilde{\chi}_t \end{bmatrix} + [(\Psi\mathbf{P} + \Psi - \Gamma)\mathbf{R} - \Pi] \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{b} \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{B.71})$$

$$\Psi \equiv \begin{bmatrix} (\beta\mathbf{D})(\mathbf{I}-\mathbf{ED})^{-1} & \mathbf{0} \\ \beta\mathbf{I} & \beta\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \Gamma \equiv \begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} \\ \Upsilon_{21} & \Upsilon_{22} \end{bmatrix},$$

$$\Theta \equiv \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \mathbf{0} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix}, \quad \Pi \equiv \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\rho}\mathbf{C} & -\frac{\beta}{\rho}\mathbf{I} \\ -\mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

为了让方程组 (B.71) 有解，且 $\begin{bmatrix} \tilde{\ell}_t \\ \tilde{\chi}_t \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ 、 $\begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ ，则需要以下条件：

$$\Psi\mathbf{P}^2 - \Gamma\mathbf{P} - \Theta = \mathbf{0}, \quad (\text{B.72})$$

$$\mathbf{R} = (\Psi\mathbf{P} + \Psi - \Gamma)^{-1}\Pi. \quad (\text{B.73})$$

基于 Uhlig (1999) 的做法，可以将第一个条件 (B.72) 写成以下广义特征向量-特征值问题 (Generalized Eigenvector-eigenvalue Problem)，其中 e 表示广义特征向量， ξ 表示 Ξ 相对于 Δ 的广义特征值，也即：

$$\xi\Delta e = \Xi e,$$

其中：

$$\Xi \equiv \begin{bmatrix} \Gamma & \Theta \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Delta \equiv \begin{bmatrix} \Psi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

若 e_h 为广义特征向量， ξ_h 为 Ξ 相对于 Δ 的广义特征值，则 e_h 可被表示为 ($h \in \mathfrak{R}^N$)：

$$e_h = \begin{bmatrix} \xi_h \bar{e}_h \\ \bar{e}_h \end{bmatrix}.$$

假设转移矩阵具有不同的特征值 (基于经验数据验证)，则存在 $2N$ 个线性独立的广义特征向量 (e_1, \dots, e_{2N}) 以及相应的稳定特征值 (ξ_1, \dots, ξ_{2N})，并且转移矩阵 \mathbf{P} 可表示为：

$$\mathbf{P} = \Omega\Lambda\Omega^{-1},$$

其中， Λ 为 $2N$ 个特征值的对角矩阵， Ω 为 $2N$ 个特征向量 $\{\bar{e}_h\}$ 的堆叠矩阵。进一步

的，可将第二个条件 (B.73) 冲击矩阵 \mathbf{R} 恢复表示为：

$$\mathbf{R} = (\Psi\mathbf{P} + \Psi - \Gamma)^{-1}\Pi.$$

因此猜想公式 (B.65) 确实是公式 (22) 二阶差分方程组的闭式解，故命题 3 得证。

B.4.7 转移路径的性质

下面，本文使用命题 3 中的特征值-特征向量表示体系 (Eigenvalue-eigenvector Representation) 来说明经济向新稳态的转移路径。

B.4.8 收敛动态与基本面冲击

特别的，本文考虑代理人在 $t=0$ 时期，将学习到基本面 $(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{b}})$ 在 $t=1$ 时的一次持久性冲击，此时，基于命题 3 与公式 (B.65)，基本面 $\tilde{\mathbf{f}}$ 第 1 期的初始冲击为：

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}.$$

更一般地，这些基本面在第 $t \geq 1$ 期的冲击为：

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}_t + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}} = \left(\sum_{s=0}^t \mathbf{P}^s \right) \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}. \quad (\text{B.74})$$

如果转移矩阵 \mathbf{P} 的谱半径小于 1 (在经验数据中已满足)，则其加总 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^t \mathbf{P}^s$ 是收敛的，因此可以进一步将基本面在第 $t \geq 1$ 期的冲击改写为：

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{P}^s - \sum_{s=t+1}^{\infty} \mathbf{P}^s \right) \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{t+1})(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}.$$

基于这一条件，新的稳态必定满足：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_{\text{new}}^* - \tilde{\mathbf{x}}_{\text{initial}}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}},$$

其中， $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{R}$ 与附录 B.4.3 中命题 A.1 的稳态变化的显式解一致：

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^z & \mathbf{L}^b \\ \mathbf{K}^z & \mathbf{K}^b \end{bmatrix}.$$

基于命题 3，可以将经济活动在不同地区空间分布的演变进一步分解为稳态收敛与基本面冲击 (的贡献)，也即：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}_{t-1} + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_{t-1} &= \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}_{t-2} + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}_{-1}. \end{aligned}$$

其中，最后一个方程 ($t=0$) 与其他方程具有不同特征，因为 $t=0$ 时，代理人将意识到基本面将在 $t=1$ 时发生一次冲击，因此他们将会选择在 $t=-1$ 或 $t=0$ 进行迁移。对时期 t 与 $t-1$ 的方程进行差分，可得：

$$\ln \mathbf{x}_t - \ln \mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{P}(\ln \mathbf{x}_{t-1} - \ln \mathbf{x}_{t-2}) = \mathbf{P}^{t-1}(\ln \mathbf{x}_1 - \ln \mathbf{x}_0) = \mathbf{P}^t(\ln \mathbf{x}_0 - \ln \mathbf{x}_{-1}) + \mathbf{P}^{t-1} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}.$$

进一步的, 可得:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{x}_t - \ln \mathbf{x}_{-1} &= [\ln \mathbf{x}_t - \ln \mathbf{x}_{t-1}] + [\ln \mathbf{x}_{t-1} - \ln \mathbf{x}_{t-2}] + \cdots \\ &\quad + [\ln \mathbf{x}_1 - \ln \mathbf{x}_0] + [\ln \mathbf{x}_0 - \ln \mathbf{x}_{-1}] \\ &= [\mathbf{P}^t(\ln \mathbf{x}_0 - \ln \mathbf{x}_{-1}) + \mathbf{P}^{t-1} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}] + [\mathbf{P}^{t-1}(\ln \mathbf{x}_0 - \ln \mathbf{x}_{-1}) + \mathbf{P}^{t-2} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}] \quad (\text{B.75}) \\ &\quad + \cdots + [\mathbf{P}(\ln \mathbf{x}_0 - \ln \mathbf{x}_{-1}) + \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}] + [\ln \mathbf{x}_0 - \ln \mathbf{x}_{-1}] \\ &= \sum_{s=0}^t \mathbf{P}^s (\ln \mathbf{x}_0 - \ln \mathbf{x}_{-1}) + \sum_{s=0}^{t-1} \mathbf{P}^s \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}. \end{aligned}$$

也即得到公式 (24)。

B.4.9 基于转移矩阵的谱分析

如前文所述, 基于特征向量的低维分量与转移矩阵 \mathbf{P} 的特征值, 可以进一步描述经济的转移路径, 而公式 (24) 则确保了可以将经济的动态路径分解为基本面冲击以及初始稳态收敛两个部分。因此, 为了简便处理, 下面重点放在处于初始稳态的经济上。

(1) 转移矩阵的特征分解。首先对转移矩阵进行特征分解: $\mathbf{P} \equiv \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}$, 其中 $\mathbf{\Lambda}$ 为按绝对值降序排序的特征值对角矩阵, 并且 $\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1}$ 。对于任意特征值 λ_h , 第 h 列 $\mathbf{U}(\mathbf{u}_h)$ 与第 h 行 $\mathbf{V}(\mathbf{v}'_h)$ 为转移矩阵 \mathbf{P} 对应的右特征向量与左特征向量, 也即:

$$\lambda_h \mathbf{u}_h = \mathbf{P} \mathbf{u}_h, \quad \lambda_h \mathbf{v}'_h = \mathbf{v}'_h \mathbf{P}.$$

也就是说, \mathbf{u}_h (或 \mathbf{v}'_h) 是这样一个向量: 当左乘 (或右乘) 转移矩阵 \mathbf{P} 时, 是其以对应特征值 λ_h 为比例的自身乘积 (矩阵 \mathbf{P} 并不需要完全对称, 而仅需满足特征值不唯一, 本文将右特征向量构造为: 对于所有 h , \mathbf{u}_h 的 2 范数 (2-norm) 均为 1, 也即 $\mathbf{v}'_i \mathbf{u}_h = 1$ 当且仅当 $i = h$, 其他情况均为 0)。而对于 \mathbf{u}_h , 本文将其简称为特征向量, 而 $\{\mathbf{u}_h\}$ 与 $\{\mathbf{v}'_h\}$ 均为扩张构成 $2N$ 维向量空间的基。

接下来, 本文将引入生产率与舒适度 (基本面) 的特定冲击, 从而有助于辅助表征模型的转移动态。本文定义一个特征冲击 (Eigen-shock) 为基本面冲击 $\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$ 对状态变量的初始影响 $\mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$, 并且这种影响与转移矩阵的真实特征向量 \mathbf{u}_h 或零向量一致。特征冲击与任意特征向量间的关系可以表示为: $\tilde{\mathbf{f}}_{(h)} = \mathbf{\Pi}^{-1}(\mathbf{\Psi} \mathbf{P} + \mathbf{\Psi} - \mathbf{\Gamma}) \mathbf{u}_h$ 。注意到, 这个关系式涉及的所有矩阵、以及转移矩阵 \mathbf{P} 的特征向量 \mathbf{u}_h , 均可仅由贸易与迁移份额矩阵 $(\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{D}, \mathbf{E})$ 和模型结构参数 $\{\psi, \theta, \beta, \rho, \mu, \delta\}$ 获得。因此, 这些特征冲击能够由可观测的现实数据以及模型结构参数进行求解。

基于特征分解与特征冲击, 可以对冲击后经济的动态响应进行谱分析。

回顾命题 4: 假定经济在初期 ($t=0$) 便处于稳态, 并且代理人在初期了解到未来 $t=1$ 时将会发生一次持久的基本面冲击 ($\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}$)。此时, 状态变量的转移路径可以写成转移矩阵 \mathbf{P} 特征值 (λ_h) 与特征向量 (\mathbf{u}_h) 的一个线性组合:

$$\tilde{x}_t = \sum_{s=0}^{t-1} \mathbf{P}^s \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}} = \sum_{h=1}^{2N} \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h' \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}} = \sum_{h=2}^{2N} \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \mathbf{u}_h a_h, \quad (\text{B.76})$$

其中，这个线性组合的权重 a_h 可以通过对已观测到的基本面冲击 $\tilde{\mathbf{f}}$ 或特征冲击 $\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$ 进行线性投影（或回归）系数获得。

证明如下：

首先考虑转移矩阵 \mathbf{P} 的特征分解： $\mathbf{P} \equiv \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}$ ，也即 $\mathbf{P}^s = \sum_{h=1}^{2N} \lambda_h^s \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h'$ ，从而有：

$$\tilde{x}_t = \sum_{s=0}^{t-1} \mathbf{P}^s \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}} = \sum_{s=0}^{t-1} \left(\sum_{h=1}^{2N} \lambda_h^s \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h' \right) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}} = \sum_{h=1}^{2N} \left(\sum_{s=0}^{t-1} \lambda_h^s \right) \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h' \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}} = \sum_{h=1}^{2N} \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h' \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}.$$

为了对任意经验冲击 $\tilde{\mathbf{f}}$ 进行分解，使之成为特征冲击 $\{\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}\}$ 的一个线性组合（ \mathbf{a} 为权重矩阵），令 \mathbf{F} 表示第 h 列为第 h 个特征冲击的矩阵，则有 $\mathbf{F} \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{f}} \Leftrightarrow \mathbf{a} = (\mathbf{F}' \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}' \tilde{\mathbf{f}}$ ，也即 \mathbf{a} 可以被恢复为 $\tilde{\mathbf{f}}$ 对特征冲击的回归系数。接下来，本文将展示如何应用命题 4 表征稳态收敛速度以及跨地区冲击的异质性影响。

(2) 收敛速度。本文使用传统的半衰期（Half-life）概念对收敛到稳态的速度进行衡量，具体而言，第 i 个状态变量对冲击 $\tilde{\mathbf{f}}$ 的半衰期被定义为：该状态变量收敛到稳态一半时所需要的时间。也即：

$$\arg \max_t \frac{|\tilde{x}_{it} - \tilde{x}_{i\infty}|}{\max_s |\tilde{x}_{is} - \tilde{x}_{i\infty}|} \geq \frac{1}{2}, \quad (\text{B.77})$$

其中， $\tilde{x}_{i\infty} = x_{i,\text{new}}^* - x_{i,\text{initial}}^*$ 。

现在，考虑非平凡特征冲击（Nontrivial Eigen-shocks）的收敛速度。对于非平凡特征冲击，状态变量呈指数收敛到稳态，其收敛速度仅取决于对应的特征值 λ_h 。

回顾命题 5：假定经济在初期（ $t=0$ ）处于稳态，并且代理人在初期了解到未来 $t=1$ 时会发生一次基本面冲击（ $\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix}$ ）。假设这些经验冲击的非平凡（Nontrivial）特征冲击为 $\tilde{\mathbf{f}}_{(h)}$ ，其对状态变量的初始冲击在 $t=1$ 时期与转移矩阵 \mathbf{P} 的真实特征值 \mathbf{u}_h 一致，也即存在 $\mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}_{(h)} = \mathbf{u}_h$ ，则状态变量 x_t 对该特征冲击响应的转移路径为：

$$\tilde{x}_t = \sum_{j=2}^{2N} \frac{1-\lambda_j^t}{1-\lambda_j} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j' \mathbf{u}_h = \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \mathbf{u}_h \Rightarrow \ln x_{t+1} - \ln x_t = \lambda_h^t \mathbf{u}_h,$$

则对于所有状态变量 $h=2, \dots, 2N$ ，其收敛到稳态的半衰期为：

$$t_h^{(1/2)}(\tilde{\mathbf{f}}) = - \left\lceil \frac{\ln 2}{\ln \lambda_h} \right\rceil,$$

其中， $\tilde{x}_{i\infty} = x_{i,\text{new}}^* - x_{i,\text{initial}}^*$ ， $\lceil \cdot \rceil$ 为上取整函数（Ceiling Function）。特别的，对于相关特征值为零的平凡特征冲击，其半衰期为零。

证明如下：

如果基本面初始冲击 $\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{f}}$ 与真实特征向量 ($\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{f}}_{(h)} = \mathbf{u}_h$) 一致，那么可以将公式 (28) 改写为：

$$\tilde{\mathbf{x}}_t = \sum_{h=2}^{2N} \frac{\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h' \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{f}} = \sum_{j=2}^{2N} \frac{1-\lambda_j^t}{1-\lambda_j} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j' \mathbf{u}_h = \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \mathbf{u}_h,$$

其中，由于 $\mathbf{v}_i' \mathbf{u}_h = 0$ for $i \neq h$ 且 $\mathbf{v}_i' \mathbf{u}_h = 1$ for $i = h$ ，对 $t+1$ 期与 t 期进行差分，则有：

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} - \tilde{\mathbf{x}}_t = \frac{1-\lambda_h^{t+1}}{1-\lambda_h} \mathbf{u}_h - \frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \mathbf{u}_h,$$

从而有： $(1-\lambda_h)(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} - \tilde{\mathbf{x}}_t) = (1-\lambda_h)\lambda_h^t \mathbf{u}_h$ 。因此： $(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1} - \tilde{\mathbf{x}}_t) = \lambda_h^t \mathbf{u}_h$ 。注意到： $\tilde{\mathbf{x}}_t = \ln \mathbf{x}_t - \ln \mathbf{x}_{\text{initial}}^*$ ，也即： $\ln \mathbf{x}_{t+1} - \ln \mathbf{x}_t = \lambda_h^t \mathbf{u}_h$ 。这意味着向稳态的收敛呈指数形式，从而对于每个地区 i 存在： $\frac{x_{i,t+1}}{x_{i,t}} = \exp(\lambda_h^t u_{ih})$ 。基于半衰期的定义式 (B.77)，可解得：

$$\frac{\frac{1-\lambda_h^t}{1-\lambda_h} \mathbf{u}_h}{\frac{1}{1-\lambda_h} \mathbf{u}_h} = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_h^t = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{1}{2} = t \ln \lambda_h, \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{\ln 2}{\ln \lambda_h}.$$

为了保证 t 为整数，因此对其设定上取整函数： $t = -\left\lceil \frac{\ln 2}{\ln \lambda_h} \right\rceil$ 。

B.4.10 两地区案例

在正文第 3.3 小节中，本文使用了一个从稳态开始的两个对称地区的简单案例对谱分析方法进行了说明。基于地区对称性与贸易与迁移摩擦，支出与迁移份额矩阵 (\mathbf{S} 和 \mathbf{D}) 均为对称且对角占优 (Diagonal-dominant) 矩阵，也即 $\mathbf{T} = \mathbf{S}$ 、 $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ 。在这个附录中，本文将对这个简单案例转移矩阵 \mathbf{P} 的 4 个特征向量提供更进一步的描述。基于本附录 B.4.6 中对于命题 3 的证明，采用状态变量的类似表述 $\tilde{\boldsymbol{\ell}}_t$ 与 $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_t \equiv \tilde{\mathbf{k}}_t - \tilde{\boldsymbol{\ell}}_t$ ，其中 $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_t$ 为各个地区的资本-劳动比向量。

如前文所述，在这个简单案例中，转移矩阵 \mathbf{P} 的四个特征向量具有以下简单形式：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \zeta \\ -\zeta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\xi \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (\text{B.78})$$

其中，常数 ζ 、 ξ 取决于模型结构参数以及贸易与迁移份额矩阵 ($\mathbf{S} = \mathbf{T}$ 、 $\mathbf{D} = \mathbf{E}$)，下面对这四个特征向量的性质作进一步分析。

首先，如果 \mathbf{u} 是 \mathbf{P} 的一个特征向量，则有：

$$\lambda^2 \boldsymbol{\Psi} \mathbf{u} = \lambda \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u} + \boldsymbol{\Theta} \mathbf{u} \quad (\text{B.79})$$

其中， λ 为对应的特征值，并且为常数； $\boldsymbol{\Psi}$ 、 $\boldsymbol{\Gamma}$ 与 $\boldsymbol{\Theta}$ 为公式 (22) 中的 4×4 矩阵。这

里，使用强力（Brute Force）手段（例如，基于 MATLAB 符号工具，可以将 Ψ 、 Γ 、 Θ 表示为模型参数与矩阵 S 与 D 中要素的函数）容易验证 $[1,1,0,0]'$ 为特征值为 0 的特征向量； $[0,0,1,1]'$ 也是一个特征向量，当业主的跨期替代弹性 ψ 等于 1（对数偏好）时，其对应的特征值为 $1 - \mu(1 - \beta(1 - \delta))$ 。更一般的，对于跨期替代弹性 ψ 不等于 1 的情况，特征向量 $[0,0,1,1]'$ 对应的特征值 λ 为以下二次方程的解：

$$\lambda = \frac{(\beta + \psi(1 - \beta)(1 - X) + X) - \sqrt{(\beta + \psi(1 - \beta)(1 - X) + X)^2 - 4\beta X}}{2\beta},$$

其中， $X \equiv 1 - \mu(1 - \beta(1 - \delta))$ 。

而对于向量 $[1,-1,0,0]'$ 与 $[0,0,1,-1]'$ ，则可以类似地证明其并不是特征向量。考虑到对称性，以及特征向量形成一个基（Basis），故剩下的特征向量必须为以下形式 $[1,-1,\zeta,-\zeta]'$ 与 $[1,-1,-\xi,\xi]'$ ，其中 ζ 、 ξ 为常数。为了探寻其对应的特征冲击，基于如下公式：

$$\Psi P^2 - \Gamma P - \Theta = 0, \quad (\Psi P + \Psi - \Gamma)R = \Pi.$$

因此，对于任意特征向量 u 及其对应的特征冲击 \tilde{f} （ $R\tilde{f} = u$ ），则其满足：

$$\Pi\tilde{f} = (\Psi P + \Psi - \Gamma)u = \frac{1}{\lambda}(\lambda\Psi + \Psi P^2 - \Gamma P)u = \frac{1}{\lambda}(\lambda\Psi + \Theta)u.$$

由于特征向量与特征冲击具有标度不变性（Scale-invariant），因此可以将常数 $1/\lambda$ 消去，从而将特征冲击改写为：

$$\tilde{f} = \Pi^{-1}(\lambda\Psi + \Theta)u$$

这样，可以证明对应于 $u = [1,1,0,0]'$ 的特征冲击为 $\tilde{f} = [0,0,1,1]'$ ，而对应于 $u = [0,0,1,1]'$ 的特征冲击则为 $\tilde{f} = [1,1,0,0]'$ 。同样的，也可以证明原则上 $[0,0,1,-1]'$ 并不是一个特征冲击（因为前两个元素 $\Pi^{-1}(\lambda\Psi + \Theta)[1,-1,\zeta,-\zeta]'$ 通常不为零）。考虑到特征冲击必须扩张一个向量空间，由于对称性，剩下的两个特征冲击必须基于 $[1,-1,c,-c]'$ 与 $[1,-1,d,-d]'$ 的形式，其中 c 、 d 为常数。